雑感　$\sqrt{2}$ に収束する有理数列

■　退屈しのぎの yahoo 知恵袋に，次の質問 [2024/3/22 14:52].
「$\sqrt{2}$ に収束する有理数列には例えばどのようなものがありますか？」
この回答に AI は，漸化式 $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$ で定まる数列がある
と，(珍しく) まともな答えをしている．この数列の初項から第 7 項までは
次の通りである（2 行目は小数第 12 位までの近似表示だが，収束が早い）．

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \frac{665857}{470832},\ \frac{886731088897}{627013566048},\ \frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}$$

1, 1.5, 1.41666666666, 1.41421568627, 1.41421356237, 1.41421356237, 1.41421356237

このような漸化式は他にもあるはずである．

■　しかし，質問者が本当に求めているのは，第 n 項が n の式で表示されているものではなかろうか．この漸化式で定まる数列の一般項を求めることは容易ではない．WolframAlpha は，上の漸化式の解については
$a_n = \sqrt{2}\coth(2^{n-1}\tanh^{-1}\sqrt{2})$ であるとしていて，実際 PC でこの式で計算すると正しそうなのだが，実は$\tanh^{-1}\sqrt{2}$ が実数でないなど，ハードルの高い式である．もっと簡単な式はないのか．
簡単な数列 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, … を考えるにしても，この一般項は簡単ではなさそうだ．

■　$\sqrt{2}$ の連分数表示はいくつかあるが，それを使う手はないものか．
右枠の連分数表示が正しいことの確認は，循環小数を有理数に直すときの便法と同様に行えば容易であり，数列 $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \cdots$ の
a_1~a_7は次の通りであり$\sqrt{2}$ に収束するが，一般項はどうしたものか．

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169}$$

1, 1.5, 1.4, 1.41666666666, 1.41379310344, 1.41428571428, 1.41420118343

■　例えばこれが$\sqrt{2}$ではなく，e であったならば，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ でよいし，π ならば Wollis の公式から $\left\{\dfrac{2\left\{\dfrac{2n\,!!}{2n-1\,!!}\right\}^2}{2n+1}\right\}$ とする手がある．
では，無限級数の項を打ち切ったらどうか．
e の場合であれば，$e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ だから，e に収束する $\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right\}$ はどうか．
π の場合であれば，$\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1^{\ k-1}}{2k-1}$ だから，$\left\{4\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{-1^{\ k-1}}{2k-1}\right\}$ はどうか．
しかし，$\sqrt{2}$ は….
手元の『数学公式Ⅱ』(岩波)で見つけたものは，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1\,!!}{n!\,4^n} = \sqrt{8}$.
これを用いて，$\left\{\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1\,!!}{k!\,4^k}\right\}$ は$\sqrt{2}$ に収束する有理数列．
収束は遅めで，a_1~a_7は次の通り．

$$\frac{7}{8},\ \frac{71}{64},\ \frac{319}{256},\ \frac{5419}{4096},\ \frac{22369}{16384},\ \frac{181955}{131072},\ \frac{734255}{524288}$$

0.875, 1.109375, 1.24609375, 1.32299804687, 1.36529541015, 1.38820648193, 1.40048027038

■　しかし，上の公式集の公式の証明も知らないし，今一つ釈然としない．
とりあえずまとめておこうとしたまさにその時，FLOOR 関数(いわゆる，ガウス記号[ ]) を用いれば，一発であることに気づいた．
$\left\{\dfrac{\mathrm{Floor}(\sqrt{2}*10^n)}{10^n}\right\}$ 別の表記では，$\left\{\dfrac{[\sqrt{2}*10^n]}{10^n}\right\}$ で良いではないか．
これは，n=0 スタートで，1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, …
に他ならない．

■　まとめるにあたって元の質問を検索したら，何と 2017/8/7 16:19 に同意の質問があり，「a[n]=[10^n√2]/10^n は√2 を小数第 n 位で打ち切った有理数になりますね」という回答が Highflyer さんによってすでになされていたのであった．

■　$2^{\sqrt{2}}$ などの値の定義で登場する，無理数に収束する有理数列．一般項の式はともかく，出番のある重要な数列である．

2024 年 05 月 01 日