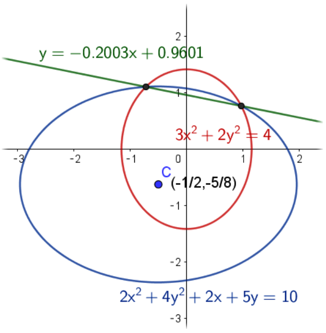
雑感　適切な例示

■　Yahoo 知恵袋に，次のようなお尋ね(数式が見づらいが，原文尊重).

　3x²+2y²-4=0…①　　2x²+4y²+2x+5y-10=0…②
この 2 つの式はそれぞれどのような図形を表していますか？
またこの 2 つの式を通る直線は存在しますか？
どのような式になりますか？

■　例えば 2 円の交点を通る直線が 2 式の引き算で求められることに対応し，その方法で求まらないことに関する質問と察し，回答した．

■　①，②はそれぞれ，次のような楕円です．交点が 2 つあるので，それらを通る直線は存在します．ただ，その方程式の正確な式は（多分）とてつもなく難しいと思われます．



　一般に，①，②の交点を通る直線は
k(3x²+2y²-4)+ℓ(2x²+4y²+2x+5y-10)=0
のように表して, x², y²が消えてしまうような k, ℓ を探すという方法がありますが，この場合, そのような k, ℓ が存在しないので，①と②の交点を求めて, その 2 点を通る直線を求めることになると思われます．

　しかし，交点の 1 つの座標は 4 次方程式を解いて

$$x=\frac{1}{8}\left(2-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{6}{-206-\dfrac{23\,639}{\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}+\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{824}{3}+\frac{47\,278}{3\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}+600\sqrt{\left(6\Big/\left(-206-\dfrac{23\,639}{\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}+\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}\right)\right)}\right)}\right)$$

$$y=\frac{2}{5}+\frac{1}{80}\left(2-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{6}{-206-\dfrac{23\,639}{\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}+\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{824}{3}+\frac{47\,278}{3\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}+600\sqrt{\left(6\Big/\left(-206-\dfrac{23\,639}{\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}+\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}\right)\right)}\right)}\right)^2+\frac{1}{20}\left(-2+\frac{1}{\sqrt{\dfrac{6}{-206-\dfrac{23\,639}{\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}+\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{824}{3}+\frac{47\,278}{3\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}+600\sqrt{\left(6\Big/\left(-206-\dfrac{23\,639}{\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}}+\sqrt[3]{12\,282\,859+1200\sqrt{113\,943\,162}}\right)\right)}\right)}\right)$$

となります．（もう 1 つも同じような複雑な値です）
　直線の厳密な方程式は存在しますが，計算はとてつもなく煩雑です．
　このような複雑な値で計算したくありません．

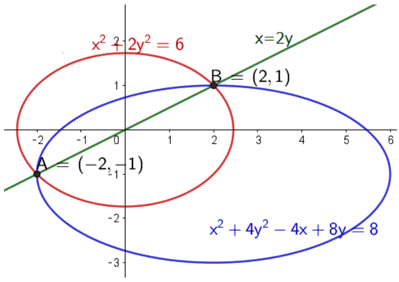
　近似値で良いというならば，(-0.721147,1.1045),　(0.970824,0.76567) という 2 点を通る直線として計算できます．おおよそ y=-0.2003x+0.9601 となります．

■　果たして，質問者から：

ご提示して頂いた、係数をおく解法で簡単な円について解いていたところ、楕円について(うまく項を消せない式)の言及があったんですが詳しい解説がなくて…。こんな煩雑な式を解かなくてはいけなかったんですね。

■　重要な言及だが，挙げた例が悪い．格子点で交わるような例を挙げて図示し，その解法のアウトラインを示せばよかったのにと思う．

　例えば，$x^2+2y^2-6=0$　…③，
$x^2+4y^2-4x+8y-8=0$　…④
とすればよい．



　③，④から x^2 を消去し，
$x=(y^2+4y-1)/2$　とし，③へ代入して整頓すると，
$y^4+8y^3+22y^2-8y-23=0$
$(y-1)(y+1)(y^2+8y+23)=0$　より
$y=\pm1$ を得て, 交点は右のような格子点になる．したがって，それらを通る直線の方程式も平易に求まる．

■　具体例を挙げることは理解を容易にするために重要なことだが，適切な例であることが求められる．読者を惑わすような例では効果がない．

2020 年 09 月 01 日