雑感　漸化式の「特殊解」の利用

■　2014 年のセンター試験の追・再試験の問題がようやく（4 月 14 日）公表となった．その IIB の「数列」に，またもや「数学的帰納法」が登場し，（昨年あまり好評でなかったので）リベンジを図ろうとしたのかなどと思った．

漸化式で，推定，帰納法で証明という流れをとるのだが，今回の問題がリベンジに値するかどうかは疑問である．

■　$a_1=4,\ a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+3n+3$ という漸化式で，

a_2，a_3，a_4 を計算させ，一般項を 4 つの選択肢から選ばせる．

⓪　$n+3$　　①　$4n$　　②　2^{n+1}　　③　$12-\frac{8}{n}$

$a_n=4n$ だが，この選択肢はどういう意図で作ったのだろうか．

①，②，③は，第 2 項まで同じであり，第 3 項で値が異なる．

実は，この数列の初項から第 n 項までの和 S_n について

$S_n=\boxed{\text{ケ}}\,n^2+\boxed{\text{コ}}$ という設問が後に続くので，②や③はあり得ないことだが，受験生には自明ではないかもしれない．

■　それはともかく，後半で非常に興味深い設問がされていく．

同じ漸化式を満たし，初項を 7 に変えた数列を $\{b_n\}$ を考え，$b_{n+1}-a_{n+1}$ について考察する中で，b_n を求める誘導がなされる．

■　ここで，一般的な話をしよう．

漸化式 $x_{n+1}=f(n)x_n+g(n)$ がある．$x_1=a_1$ として定まる数列 $\{a_n\}$ と，$x_1=b_1$ として定まる数列 $\{b_n\}$ を考えると，

$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$，　$b_{n+1}=f(n)b_n+g(n)$

が成り立つから，$b_{n+1}-a_{n+1}=f(n)(b_n-a_n)$ であり，これより

$b_n-a_n=(b_1-a_1)\prod_{k=1}^{n-1}f(k)$ となる．

もしここで，a_n が分かっていたとすれば，これよりただちに b_n を求めることができるという寸法である．

もちろん，$\prod_{k=1}^{n-1}f(k)$ が計算できることが前提である．

■　そういった観点で，センター試験のこの問題をみると，$\{a_n\}$ といった「特殊解」を最初に求めておいて，その結果を上のように用いて，$\{b_n\}$ を求めさせようとしているのだ．

ちなみに，ここでは $\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\cdot\frac{k+1}{k}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}n$ である．

■　う〜む．これはすごいぞ．

考えてみれば，隣接 2 項間の線型の漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で特性方程式 $x=px+q$ の解 $x=\alpha$ を用いて $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ として解くのも，与漸化式の特殊解（定数列 $\{\alpha\}$）を用いて同じように解いているのだ．

■　この漸化式で，「特殊解」$\{a_n\}$ は，漸化式に $\frac{1}{n}$ の「係数」があるので，これが「なくなる」ように，$a_n=pn$ の形に設定してできたものであると考えられる．

■　出題者の問題作成方針をたどってみると，おそらく次のようである．

$x_{n+1}=f(n)x_n+g(n)$ という漸化式から，一般項を求めるに当たって，$\prod_{k=1}^{n-1}f(k)$ が計算可能な $f(k)$ として，$\frac{k+1}{k}=1+\frac{1}{k}$ を用意したが，これでは簡単すぎると考え，$f(k)=\frac{k+1}{4k}$ とした．

なお，$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{4k}=\frac{n}{4^{n-1}}$ である．

すると，$x_{n+1}=\frac{n+1}{4n}x_n+g(n)$ で，この漸化式の特殊解 $\{a_n\}$ について，$a_{n+1}=\frac{n+1}{4n}a_n+g(n)$ の a_n の「係数」の分母が $4n$ であるから，$a_n=4n$ とすれば「約分」ができて式が簡単になる．

このとき，$a_{n+1}=4(n+1)$ より $g(n)=4(n+1)-(n+1)=3n+3$ となって，漸化式が完成である．このとき，$a_1=4$ であるが，同じ漸化式を満たす $\{b_n\}$ について，$b_1\neq 4$ の場合はこの特殊解 $\{a_n\}$ ほどには簡単でない式が，b_n として求まってくるという流れである．なお，$b_n=n(3\cdot 4^{1-n}+4)$ である．

■　この方法で解ける漸化式を 2 つ作ってみた．

(1)　$b_{n+1}=2^{2n}b_n+n(1-2^{2n})+1,\ b_1=2$　　$(a_1=1$ を利用)

（$b_{n+1}=4^nb_n+n(1-4^n)+1,\ b_1=2$ とすると，やや難しくなる）

(2)　$b_{n+1}=nb_n-\frac{n}{n+1},\ b_1=2$　　$(a_1=1$ を利用 $)$

これらの解の b_n の式は，あまり目にしたことのないような式である．

ちなみに，(1)　$b_n=n+2^{n(n-1)}$　　(2)　$b_n=\frac{1}{n}+(n-1)!$　である．

■　なお，数式処理ソフト Maxima でこれらの漸化式を解かせてみると，上のセンター試験再・追試験の問題と(2)は上の解の式を出力した（下の%i7〜%o8 と%i5〜%o5）．

しかし，(1)については複雑な式の出力となった（%i6〜%o6）．

一般的な式で書けば，$b_n=2\prod_{i=1}^{n-1}2^{2i}+\sum_{j=1}^{n-1}(-j2^{2j}+j-1)\prod_{k=1}^{n-j-1}2^{2(k+j)}$ であり，Π の計算が苦手なのだろうか．

```
 -->  load("solve_rec");

(%i5) solve_rec(b[n+1]=n·b[n]-n/(n+1),b[n],b[1]=2);
solve: dependent equations eliminated: (1)
(%o5) b_n=(n-1)!+1/n

(%i6) solve_rec(b[n+1]=2^(2·n)·b[n]+n·(1-2^(2·n))-1,b[n],b[1]=2);
errexp1 non-rational term ratio to nusum
(%o6) b_n=2(prod(2^(2 %l), %l=1, n-1))+sum((-%j 2^(2 %j)+%j-1) prod(2^(2(%j1+%j)), %j1=1, n-%j-1), %j=1, n-1)

(%i7) solve_rec(b[n+1]=(1+1/n)·b[n]/4+3·n+3,b[n],b[1]=7);
(%o7) b_n=-n 4^(2-n)+7 n 4^(1-n)+4 n

(%i8) factor((%o7));
(%o8) b_n=n 4^(1-n) (4^n+3)
```

■　いずれにせよ，このタイプの漸化式解法用に何らかの式が組み込まれていることは事実だ．

$x_{n+1}=f(n)x_n+g(n)$　という漸化式から，

$x_2=f(1)x_1+g(1)$，$x_3=f(2)x_2+g(2)=f(2)\{f(1)x_1+g(1)\}+g(2)$，

$x_4=f(3)x_3+g(3)=f(3)\{f(1)f(2)x_1+f(2)g(1)+g(2)\}+g(3)$，…

と次々作っていくと，帰納的に $x_n=\prod_{i=1}^{n-1}f(i)x_1+\sum_{j=1}^{n-1}g(j)\prod_{k=j+1}^{n-1}f(k)$ となる．こういった式が使われているのであろう．

実際，solve_rec(x[n+1]=f(n)*x[n]+g(n),x[n],x[1]=x);　から

$x_n=\prod_{i=1}^{n-1}f(i)x+\sum_{j=1}^{n-1}g(j)\prod_{k=1}^{n-j-1}f(k+j)$ の出力を得た．これは最後の Π の部分の表記が異なっているが，上式と同値である．

2014 年 5 月 9 日