雑感　2 次曲線上の有理数点

■　手元にある数学 III の問題集に 2 点を通る標準形の楕円を決定させる問題がある．その 2 点の座標が，何と $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{33}}{3}\right)$ と $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である．$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ へ代入するとき 2 乗するからと言え，もっと何とかならないものか．

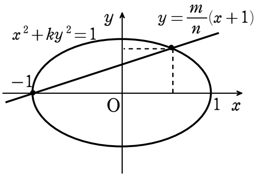
別の問題集では，$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{65}}{6}\right)$ と $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である．こちらはまだ少しましと言うべきだが，大同小異である．

■　拙著『問題作りの道具箱』では，p.89～「15　2 次曲線上の格子点」に，標準形の楕円の場合については，円上の格子点の利用と，$1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}$ といった分数の分解の利用で格子点や有理数点を探す方法を提案してある．

■　ここでは，ディオファントス方程式 $a^2+kb^2=c^2$ の解の利用について触れたい．ここに k は整数である（この解を k-ピタゴラス数と呼ぶ人もいるようだが，k-ピタゴラス数は，方程式 $a^2+kab+b^2=c^2$ の解とするようなので，その名称を避ける）．

次のように，$a^2+kb^2=c^2$ の解 $(a,\ b,\ c)$ を表す式を導く．

2 次曲線 $x^2+ky^2=1$ 上の自明な格子点 $(-1,\ 0)$ を通る有理数 $\dfrac{m}{n}$ を傾きにもつ直線 $y=\dfrac{m}{n}(x+1)$ を考え，この $(-1,\ 0)$ とは異なる交点の座標を求める．



$x^2+\dfrac{km^2}{n^2}(x+1)^2=1$　を整とんして

$(km^2+n^2)x^2-2m^2x+(km^2-n^2)=0$　より

$x=\dfrac{n^2-km^2}{n^2+km^2},\ y=\dfrac{2mn}{n^2+km^2}$　を得る．

これより，$(n^2-km^2)^2+k(2mn)^2=(n^2+km^2)^2$ が成り立ち，$m,\ n\ (\neq 0)$ を整数とするとき，

$(a,\ b,\ c)=(|n^2-km^2|,\ |2mn|,\ |n^2+km^2|)$ は，$a^2+kb^2=c^2$ の正の解の組である．

■　例えば $k=4$ とし，$m=n=1$ とすると $(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 5)$ であるから，$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+4\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=1$ であり，点 $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ は楕円 $x^2+4y^2=1$ の有理数点である．

この楕円を O 中心に 10 倍の拡大を行うと，楕円 $\dfrac{x^2}{10^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$ 上に格子点 $(6,\ 4)$ が存在することになる．

■　k の値は負の値 $-k'\ (k'>0)$ にすることもできるが，その場合，$a^2-k'b^2=c^2$ は $c^2+k'b^2=a^2$ であるから，$k>0$ の場合の a と c を入れ替えたものになる．

したがって，上の楕円の例を用いれば，点 $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ が双曲線 $x^2-4y^2=1$ 上の有理数点であり，これを O 中心に 6 倍の拡大をした双曲線 $\dfrac{x^2}{6^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 上に格子点 $(10,\ 4)$ が存在する．

■　2 次曲線の決定問題なら，格子点や有理数点でなくても構わないとしても，その点における接線の方程式では複雑な座標の点の場合，方程式も複雑で見栄えの悪いものとなるのが一般だ．

2014 年 11 月 13 日