

■ 数学を利用すれば問題解決できるのではないかと、という観点での質問が、Web上に寄せられることがある。

条件が明瞭でなかったり、値などが複雑で敬遠したいことも多いのだが、回答できそうな質問は極力手をつけてみるようにしている。最近回答した2例を挙げる。

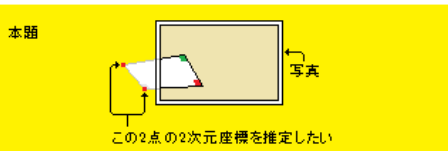
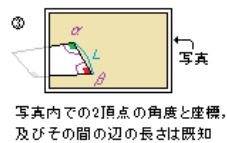
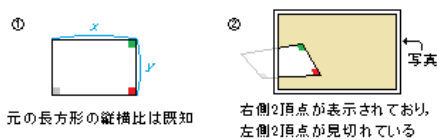
■ 画像に示すような、写真の中に見切れた形で表示されている長方形の、画面内にはない頂点の位置を推定したいのですが、計算で導き出す方法はありますか？

①元の長方形の縦横比はわかっている

②4つある頂点のうち、右側2点が写真内に表示されており、左側2点が見切れてしまっている

③写真内に表示されている右側2点の頂点の角度と座標、及びその頂点間の辺の長さはわかっている

④写真の奥行情報はわからない(写真上の2次元座標はわかるが、カメラからの3次元座標はわからない)



です。  
求めたいものは表示されていない頂点の、写真と同じ2次元平面上での座標です。  
写真内にはない座標なので負の値も取り得ますがそれで問題ありません。  
よろしくをお願いします。

■ 長方形が一般の四角形に変換されているので、この変換は射影変換とよばれる変換だと思います。射影変換  $(x,y) \rightarrow (u,v)$  の変換式は  $u=(ax+by+c)/(gx+hy+1)$ ,  $v=(dx+ey+f)/(gx+hy+1)$  で表され、係数が  $a \sim h$  の8個あります。

従って、これらの値を決定するには8個の方程式が必要ですが、点の座標  $x$ ,  $y$  座標を考えれば、4点の座標が必要です。

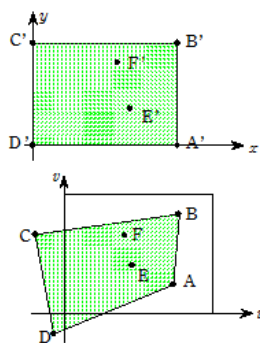
写真の中の四角形の2つの頂点(A, Bとします)の座標が分かっているわけですが、その2点の辺の長さは座標から求める情報なので、座標で事足ります。角が2つ分かっていますが、角から情報(方程式)を得るのは(勘ですが)楽ではなさそうです。

そこで、写真内の長方形に属する(A, Bとは異なる)2点E, Fを、元の長方形内の2点E', F'と対応させることはできないでしょうか？

ただし、その2点E, Fの位置には条件があって、A, B, E, Fの中から3点を取ったとき、それが一直線上にないようにとらないといけません。

このようにして、A', B', E', F'の座標を変換式の  $x, y$  に代入してそれらがA, B, E, Fの座標  $u, v$  に等しいとした方程式を作ると、8つの方程式が得られます。これらを連立させて、 $a \sim h$  の8個の値を定めます。

その値を変換式に代入し、そこにC', D'の座標を代入すれば、C, Dの座標が求まると思います。連立方程式を解くのは大変そうですが...



■ 分かりやすい図、および数式や解説までついた丁寧な回答ありがとうございます。

>角が2つ分かっていますが、角から情報(方程式)を得るのは(勘ですが)楽ではなさそうです。

これが出来れば嬉しいと思っていましたがやはりそうですよね.....

調べてみてもその手の計算方法がヒットせず困り果てておりました。

>そこで、写真内の長方形に属する(A, Bとは異なる)2点E, Fを、元の長方形内の2点E', F'と対応させることはできないでしょうか？

なるほど考えもしていませんでした。

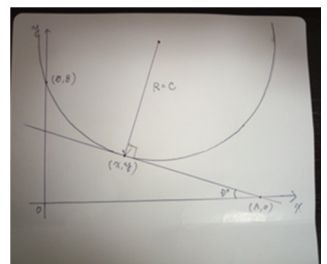
確かにその方法であれば無事導き出せそうです。

射影変換の連立方程式については座標から算出してくれるプログラムが手元にあるので、計算する手間の方は問題ありません。

対応点を適切に設定できるかが課題ですが、そこは試行錯誤してうまくいこうと手動で合わせようと思います。どうもありがとうございました。

■ 画像処理の専門家なのだろうか。別の2点をとるというアドバイスが奏功してくれればよいのだが。

■ 鉄工所の図面で、下図のような円と直線の接点の座標  $(x,y)$  を求める仕事があります。接点座標  $(x,y)$  は図にあるA, B, C, Dを用いて表わせますか？



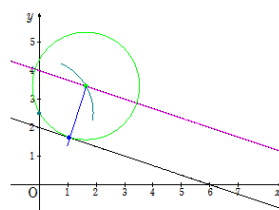
■ 作図的には、元の直線と平行で、円の中心を通る直線  $m$  を引き(この2本の直線の距離が  $C$  となるように引くので、円の中心が分かっている必要はありません)、 $(0, B)$  を中心とし、半径  $C$  の円と  $m$  との交点が円の中心です。ここから、元の直線へ垂線をひけばOKです。この方針で、 $x, y$  を計算しました。

図から、 $A > B > 0$  を条件とし、文字は小文字に直してあります。

複雑な式ですが、貼付の図の条件で計算してほぼ一致したので、多分大丈夫です(責任は負いかねますが...)

$$x = \cos d \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 d + 2b(a \sin d + c) \cos d - 2ac \sin d - a^2 - b \sin d \cos d + a \sin^2 d},$$

$$y = -\sin d \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 d + 2b(a \sin d + c) \cos d - 2ac \sin d - a^2 + a \sin d \cos d + b \sin^2 d}$$



■ 大変な計算だったが、具体的な条件での図で計算と作図ではほぼ合ったので、回答した。

■ 翌日、次のような返信があった。

すぐ早くわかりやすい解答ありがとうございました。

この図面は数値が毎回違いますが、よく来ていた仕事でいつも社長が拡大製図して座標を求めていたようです。

この出してくれた式に昔の図面の数値を代入すると、ぴったり数値が合いました(^ ^)

役に立てて、回答者冥利に尽きる。

しかし、鉄工所もこんな計算をしなければならぬんだねえ。今後、「知恵袋の公式」とか言って、代々使い続けられていくとされると愉快でもある。