雑感　極方程式とパラメータ表示

■　Yahoo 知恵袋の質問で多いジャンルの 1 つに，極方程式がある．

この「雑感」ではかつて，http://www10.plala.or.jp/mondai/columun/kyoku.pdf に，極方程式指導の難しさを書いた．

さて，過日

極座標で表された平面曲線 C:r=r(θ)に対して、C 上の点 P(θ)における接線の傾きを求めるとき、 直交座標に変換することなく計算することはできますか？

という質問が載った．

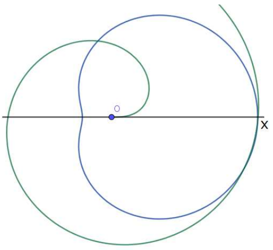
これに 1 つの回答が掲載された．tan の加法定理を用いたものだが，{r+(dr/dθ)tanθ}/{(dr/dθ)-rtanθ} であるとしていて，これは正しい．しかし，導き方は高校生には分かりやすいとは言えない回答である．

質問者は，

教えていただいた方法が自分でもできるようになりたいです。

とお礼を述べている．失礼を顧みず言わせてもらえば，多分，質問者は理解できぬままこのように返答している．

■　極方程式では，教科書でも参考書でも直交座標への変換方法を載せている．しかし，直交座標で普通に扱える曲線を極方程式表示する意味はあまりない．



極方程式だから簡潔に表せ，平易に処理できる曲線こそ，極方程式の出番のはずだ．

だから，例えば$r=\sqrt{\theta}$ (右図：緑)などといった螺旋形や，$r=\cos\theta+3/2$ (右図：青)といったリマソンなどにおいて極方程式が威力を発揮する．

ところが，こういった極方程式は，簡単には直交座標表示できない．

このような曲線で，接線の傾きを求めたいというとき，どう考えるのがよいのか．先の質問者の本来の真意はここにあったのではないか．

実は，極方程式$\boldsymbol{r=f(\theta)}$で表される曲線は，$\boldsymbol{\theta}$をパラメータとして，

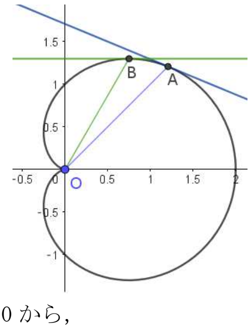
$$\boldsymbol{x=f(\theta)\cos\theta},\quad \boldsymbol{y=f(\theta)\sin\theta}$$

とパラメータ表示できることは，少し考えれば分かる．

これを用いれば，接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$$

であることが，すぐに分かる．しかも，パラメータ表示さえ理解して覚えておけば，いつでもスッと導ける式である．



なお，この式の分子・分母を$\cos\theta$で割ると，上の tan を用いた表示に一致する．

例えば，カージオイド $r=1+\cos\theta$ の $\theta=\pi/4$ に対応する点 A における接線の傾きは $(1+\cos\theta)'=-\sin\theta$ であることを用い，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta}{-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta}\quad から，$$

$1-\sqrt{2}$ である．

極方程式は直線の方程式を苦手としている印象だが，パラメータ表示すれば処理が容易になる．

また，極大となる点 B についても，接線の傾き 0 から，$-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=0$ を解いて，$\theta=\pi/3$ より，B の極座標が $(3/2\,,\pi/3)$ となる．

■　このように，極方程式をパラメータ表示してしまえば，曲線の長さを求める場合でも，わざわざ極方程式の場合の公式 $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ を導き出さなくとも，$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ の公式で事足りる．

このパラメータ表示に触れている参考書もあると思われるが，授業場面でも触れておいて悪くないような気がする．

2020 年 10 月 01 日