雑感　極方程式の得手・不得手

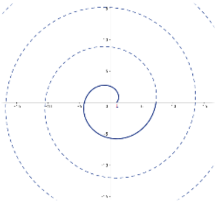
■　極方程式がよく分からないという生徒の声は多い．直交座標で十分なのに，わざわざ登場させる理由が分からないと生徒たちは言う．
　極方程式 $r=f(\theta)$ が表す図形について，若干の考察を試みる．

■　最初に「方程式」という観点で考える．

(1) $\theta=\alpha$ （定数）のとき
　図形は O を通り始線となす角が α である直線．

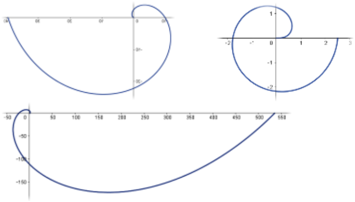
(2) $r=R(>0;$ 定数$)$ のとき
　図形は O 中心，半径 R の円．
　直交座標では方程式が x, y の2次の陰関数であることを考えれば，すこぶる単純明快である．

(3) $r=a\theta+b$ $(a\neq0)$ のとき
例えば $r=\theta+1$ のとき，図形は図のような螺旋．
$0\leq\theta\leq2\pi$ の範囲が実線部分である．



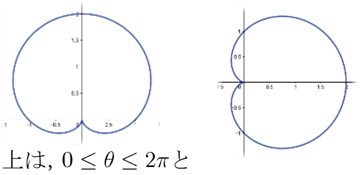
直交座標で $y=x+1$が，xの右への増加に対するyの上への増加が，$r=\theta+1$ では回転角 θ の増加に対する O からの距離 rの増加という形で螺旋が出来ている．

(4) $r=$ (θの単調関数)のとき
増加関数であれば，(3)と同じように $\theta\nearrow$に対応して $r\nearrow$であるが，関数によって増え方が違う螺旋になる．

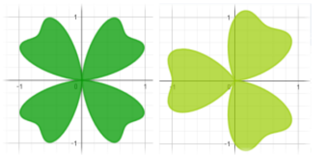


上は，順に$r=\theta^2, r=\sqrt{\theta}, r=e^{\theta}$．
減少関数のときは，O に近づくように巻き付いていく．

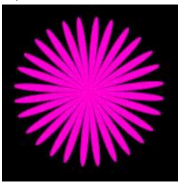
(5) $r=$ (θの周期関数)のとき
sin, cos といった有界な周期関数であれば，(3)(4)の螺旋のようには図形が広がっていかない．



上は，$0\leq\theta\leq2\pi$として $r=1+\sin\theta, r=1+\cos\theta$ であり，共にカージオイドであって $r(0)=r(2\pi)$ から，連結図形になる．
　関数を調整したりすると例えば
$r=\sin^2 2\theta+0.5\sin^2 4\theta$
$r=\sin^2(3\theta/2)+0.5\sin^2 3\theta$
により，次のような曲線が得られる．（内部をペイントした）

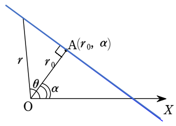


$r=\sin n\theta$ で，nを 0.01 程の刻みにして，1~20 程の範囲で描写アニメーションをすれば，バラ曲線の形が次々と変化し，まるで夜空に浮かぶ花火のようなアニメーションが現れる．



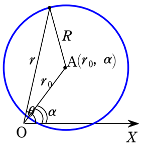
■　次に「基本的な図形」という観点で考える．

(6) 一般の直線
　点 A (r_0,α) を通り，OA を法線とする直線は



$r\cos(\theta-\alpha)=r_0$という面倒な形.

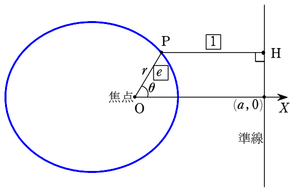
(7) 点 A (r_0,α) を中心とし，半径 R の円は，余弦定理により



$$r^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2=R^2$$

特に A$(r_0,0)$, $R=r_0$ のとき, OA が半径で，$r=2r_0\cos\theta$となるが，これは(5)の型の方程式と言っても良い．

(8) 2 次曲線
　焦点(の 1 つ)が O であり，軸が始線に重なる 2 次曲線は，その離心率をe とするとき，$r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$



■　このように見てくると，極方程式が得意とする図形は，O 周りの回転図形や，2 次曲線のように O をその図形の重要な特殊点とする図形である．
　さらに，そういった図形の O 周りの回転も得意で，曲線 $r=f(\theta)$ を O 周りに α だけ回転させた図形の極方程式は $r=f(\theta-\alpha)$ である．
実際，(5)の 2 つのカージオイドは $1+\sin(\theta+\pi/2)=1+\cos\theta$ から左の図形を O 周りに$-\pi/2$ 回転させると右のそれになっている．

■　一方，苦手なのは平行移動であり，一般的な平行移動は恐らく無理．上の得意とする条件以外の図形は，仮にそれが基本的な図形でも，極方程式は（導くことができても）複雑な式になるだろうと思われる（(2)の平行移動形が(7)ではある）．