雑感　パラメータの消去

■　次のようなパラメータの消去の問題がある．問題によっては，問題を解いていく中で，次のようなパラメータの消去に帰着するという場合も多い．

> パラメータ t が変化するとき，次の点の軌跡を求めよ．
>
> (1)　$\left(\dfrac{1}{1+t^2},\ \dfrac{t}{1+t^2}\right)$　　　(2)　$\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

■　そのパラメータの消去だが，慣れてくれば x, y の簡単な関係式を求めて，そこから t を求めて代入するという手法を覚えて処理できるようになる．

たとえば(1)では，$x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$ に対して，$y=tx$ から，$x\neq 0$ のとき $t=\dfrac{y}{x}$ が成り立つ．これを $x=\dfrac{1}{1+t^2}$，すなわち $x(1+t^2)=1$ へ代入して，$x\left\{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right\}=1$．これを整頓して $x(x^2-x+y^2)=0$ を得，$x\neq 0$ から $x^2-x+y^2=0$ $(x\neq 0)$．すなわち，円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$（ただし，原点を除く）．

■　(2)は少し難しい．慣れてくれば「これは原点中心の円だ」などと分かってしまい，$x^2+y^2=\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=\cdots=1$ などといった「解」を板書でもしようものなら，生徒から「何でそういった計算をするんですか？？」などといった質問が集中する．「こうすると上手くいくからだよ」などと言っても，納得してくれるはずもない．

■　ではどうすればいいか．様々な手法があることを承知の上で，**「仮分数は帯分数表示する」**という方針を採用してみる．

$y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ であるから，$y=-1+\dfrac{x}{t}$ より $y+1\neq 0$ のとき $t=\dfrac{x}{y+1}$ が成り立つ．これを $x(1+t^2)=2t$ へ代入して

$x\left\{1+\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2\right\}=\dfrac{2x}{y+1}$．これより $x^2+y^2=1$ を得る（除外点の処理は省いた）．

■　**「仮分数は帯分数表示する」**は関数の微分や積分では基本的な手法で，分数式は分子の次数を分母のそれ未満にする．ここでもその手法が功を奏した．

■　もう少し難しい問題もあるが，この方針は変えない．

> (3)　$\left(\dfrac{t^2-2t-1}{1+t^2},\ \dfrac{1-2t-t^2}{1+t^2}\right)$

$$x=\frac{t^2-2t-1}{1+t^2}=1-\frac{2(t+1)}{1+t^2}=1-\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2}{1+t^2},$$

$$y=\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}=-1-\frac{2(t-1)}{1+t^2}=-1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}.$$

ここで，$\dfrac{2}{1+t^2}=A$ とおくと $\begin{cases} x-1=-A(t+1) \\ y+1=-A(t-1) \end{cases}$．これから

$(x-1)(t-1)=(y+1)(t+1)$　より　$x-y-2\neq 0$ のとき $t=\dfrac{x+y}{x-y-2}$．

これを $x(1+t^2)=t^2-2t-1$ へ代入して

$$x\left\{1+\left(\frac{x+y}{x-y-2}\right)^2\right\}=\left(\frac{x+y}{x-y-2}\right)^2-\frac{2(x+y)}{x-y-2}-1.$$

分母を払って整頓すると，$2(x-1)(x^2+y^2-2)=0$ …①となり，パラメータが消去できた．

もちろん，除外点の処理をきちんと行う必要がある．

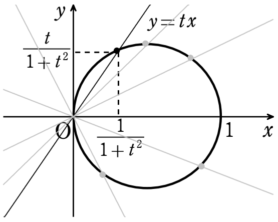
$x-y-2=0$ のとき，$y=x-2$ を①へ代入して，$(x-1)^3=0$ から $x-y-2\neq 0$ より点 $(1,\ -1)$ を除外する．

また，①から $x=1$ または $x^2+y^2=2$ だが，$x=1$ のとき $\dfrac{t^2-2t-1}{1+t^2}=1$ から $t=-1$ で，$y=\dfrac{1-2t-t^2}{1+t^2}=1$ より点 $(1,\ 1)$ となるが，これは円 $x^2+y^2=2$ に含まれる．

結局，軌跡は，円 $x^2+y^2=2$ で，点 $(1,\ -1)$ を除外する．

■　(1)～(3)で導いた x，y の簡単な関係式，すなわち(1)の $y=tx$，(2)の $y=-1+\dfrac{x}{t}$，(3)の $(x-1)(t-1)=(y+1)(t+1)$ は何を表しているのかは，ご存じの方も多かろう．

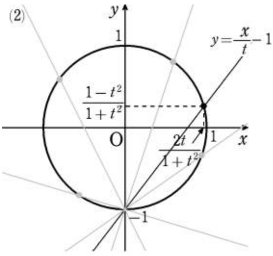
実は，パラメータ表示するために用いた直線群がこの関係式である．

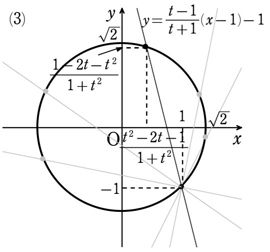


(1)では円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ をパラメータ表示するために，この円と原点を通る直線群 $y=tx$ の交点の座標を求めたものがパラメータ表示になっている．

(2)では円 $x^2+y^2=1$ とこの円の下端の点 $(0,\ -1)$ を通る直線群 $y=-1+\dfrac{x}{t}$ との交点の座標である．

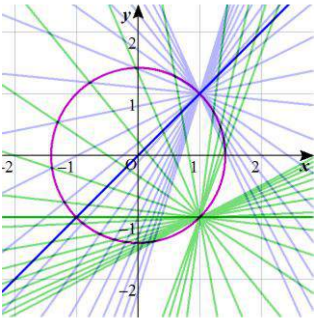
(3)では円 $x^2+y^2=2$ とこの円上の点 $(1,\ -1)$ を通る直線群 $(x-1)(t-1)=(y+1)(t+1)$ との交点の座標である．





■　また，これらの図形は，定点を通る 2 直線の交点として現れる．(1)では，$y=tx$ と $y=-\dfrac{x-1}{t}$ の，(2)は $y=\dfrac{x}{t}-1$ と $y=1-tx$ のいずれも直交する 2 直線の交点である．

(3)はもう少し複雑で，実は $y=t(x-1)+1$ の関係も成り立つ．この直線は点 $(1,\ 1)$ を通る傾き t の直線である．そして，2 直線 $(x-1)(t-1)=(y+1)(t+1)$，$y=t(x-1)+1$ は常に $45°$ または $135°$ の角をなし，2 定点を結ぶ線分を弦としその弦に立つ $45°$ または $135°$ の角を円周角とする円になる．



※ J 氏より，(2)について誤りの指摘を受け，1 月 14 日訂正．

2012 年 1 月 4 日