雑感　驚き桃の木の連続微分方式

■　前任校でのある日．同僚の J 先生が，演習の授業の予習をしている．「頑張ってますね」などと声をかけて覗いて見ると，数学Ⅲの微分法の問題らしい．どういう方法で解こうか思案している様子だ．覗いた私は，パッと見ただけで解法が分かってしまった（別に自慢しているわけではない）．
「先生ならどうしますか？」などと尋ねられて，「それはね，ドンドン微分していって定数を取り出してしまえば良いんですよ」と答えた．

■　すると，J 先生の曰く．「あ！ それ，連続微分方式とか言うんでしたっけ？」．これに私は驚いて「え？ そんな言葉よく知ってますね」「確か『大学への数学』の中で紹介されてませんでしたっけ．しかも，誰か高校の先生が投稿して提案された解法だったような…」「へえ，詳しいですね．実は，あの投稿をしたのは，実は私なんですよ」「え〜〜っ!!」
　お互いに，驚き桃の木山椒の木．私にしてみれば，そんな記事をしっかり記憶に留めていた J 先生に驚き，J 先生にしてみれば，投稿をした人が目の前の同僚だったことに驚き….

■　手元の古い資料を繰ってみれば，『大学への数学』1983 年 8 月号，福田邦彦氏の「微分法—とくに不等式について」という記事であり，「連続微分方式」は福田氏による命名である．
　問題点が明瞭になる例で話をする．

$x \geqq 0$ において，常に不等式 $\sin x \geqq x + ax^3$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

　こういった問題の一般的に便利な解法は，「文字定数を分離する」方法である．「分離」すると，$x>0$ において $\dfrac{\sin x - x}{x^3} \geqq a$ となる．$y = \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ とおいてこの関数の増減を調べようとすると，$y' = \dfrac{x\cos x - 3\sin x + 2x}{x^4}$ となり，$y'=0$ という方程式を解くのが困難である．したがって，この「分離」する方法はここではうまい方法ではない．
　そこで，私が提案した「連続微分方式」の登場である．
　＜解＞　$f(x) = \sin x - x - ax^3$ とおくと，$f(0)=0$．
　$f'(x) = \cos x - 1 - 3ax^2$ で，$f'(0)=0$．
　$f''(x) = -\sin x - 6ax$ で，$f''(0)=0$．
　$f'''(x) = -\cos x - 6a$ で，$f'''(0) = -1-6a$．
　ここで，$f'''(0)<0$ とすると，$f''(0)=0$，$f'(0)=0$ から $f'(x)$ は $x=0$ で極大値 0 をとる．すると，$x=0$ に十分近い $x>0$ において $f'(x)<0$ となるから，この範囲で $f(x)$ は単調減少である．$f(0)=0$ であるから，この範囲で $f(x)<0$ となって，$x \geqq 0$ で常に $f(x) \geqq 0$ という条件に反する．
　したがって，$f'''(0) \geqq 0$ すなわち $a \leqq -\dfrac{1}{6}$ が必要である．
　逆にこのとき，$f'''(x) \geqq -\cos x + 1 \geqq 0$ から $f''(x)$ は単調増加で，$f''(0)=0$ から $x \geqq 0$ において $f''(x) \geqq 0$．すると $f'(x)$ が単調増加で，$f'(0)=0$ から $x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$．よって，$f(x)$ が単調増加で，$f(0)=0$ から $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq 0$．
　以上から，求める a の範囲は $a \leqq -\dfrac{1}{6}$ である．（終）

■　このように，ドンドン微分していって文字定数 a を取り出す方法である．この方法は特に，関数の Taylor(Maclaurin)展開の形をしている問題で，きわめて有効な手法である．
　この雑誌の別冊の中で，このタイプの問題の解法があまりにも面倒なものだったので，「別解」として提案したものだった．それが，かくも深く同僚の記憶に刻み込まれていたなんて….