雑感　GeoGebra の因数分解能力

■　ある問題解決のために，次のような 3 次方程式を解くことになった．ただし，$a>1$ である．

$$(a^2-1)x^3-(2a^2-1)x-a\sqrt{a^2-1}=0\ .$$

因数定理というわけにも行きそうになく，数式処理ソフトの助けを借りることにした．

まず，私が日頃お世話になっている Derive では，逆三角関数を用いた次のような解を出力した（3 つのうち 1 つのみを載せる）．

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2a^2-1}{a^2-1}}\sin\left\{\frac{1}{3}\arctan\frac{3\sqrt{3}a(a^2-1)}{(a^2+1)\sqrt{5a^2-4}}\right\}.$$

実際はもっと複雑な式であったが，「手動」で簡略化した．

Derive は簡単に表示できない 3 次方程式は，こういった逆三角関数を用いた解（ビエタの解と呼ばれ，cos の 3 倍角の公式を用いた解である）で表示する．

■　Maxima に解かせてみる．1 つの解は次のようになる．

$$x=\left(-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(a^2+1)\sqrt{-\frac{5a^2-4}{a^2-1}}}{2\,3^{3/2}(a^2-1)}-\frac{a\sqrt{a^2-1}}{2a^2-2}\right)^{1/3}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2}-\frac{1}{2}\right)(2a^2-1)}{(3a^2-3)\left(\frac{(a^2+1)\sqrt{-\frac{5a^2-4}{a^2-1}}}{2\,3^{3/2}(a^2-1)}-\frac{a\sqrt{a^2-1}}{2a^2-2}\right)^{1/3}}$$

ここで，%i は虚数単位であり，表示される 3 つの解のうち 2 つに%i を含んでいる．カルダノの公式による解である．

■　WolframAlpha は，次のような解を示す（3 つのうち の 1 つ）．

$$\begin{aligned}x=&-\big((1+i\sqrt{3})(2a^4-3a^2+1)\big)\Big/\\&\Big(2^{2/3}(a^2-1)\Big(-27\sqrt{a^2-1}\,a-27\sqrt{a^2-1}\,a^5+54\sqrt{a^2-1}\,a^3+\\&\sqrt{-135a^{12}+243a^{10}+162a^8-486a^6+81a^4+243a^2-108}\\&\Big)\hat{}\,(1/3)\Big)-\frac{1}{6\sqrt[3]{2}\,(a^2-1)}\\&(1-i\sqrt{3})\Big(-27\sqrt{a^2-1}\,a-27\sqrt{a^2-1}\,a^5+54\sqrt{a^2-1}\,a^3+\\&\sqrt{-135a^{12}+243a^{10}+162a^8-486a^6+81a^4+243a^2-108}\Big)\hat{}\\&(1/3)\ \text{and}\ a^2-1\neq 0\end{aligned}$$

■　実は，$a>1$ において，この 3 次方程式の判別式が

$$D=\frac{(a^2+1)^2(5a^2-4)}{(a+1)^3(a-1)^3}>0$$ となるから，異なる 3 つの実数解をもち，すべて実数である．i を含んだ解の表示があっても，これらはいわゆる還元不能のタイプである．

■　さて，GeoGebra である．この CAS 画面で解を求めると，

$$x=\frac{-a\sqrt{a^2-1}+\sqrt{5a^4-9a^2+4}}{2a^2-2},\ x=\frac{-a\sqrt{a^2-1}-\sqrt{5a^4-9a^2+4}}{2a^2-2},\ x=a\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$$

という解を表示してくれる．

え?!!! こんなに簡単なの？　間違っていない？

この 3 次方程式の左辺は

$$(a-1)\ (a+1)\ \left(x-a\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}\right)\ \left(x^2+a\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}x-1\right)$$

と，x の 1 次式と 2 次式の積に因数分解可能だったのである．

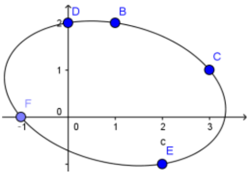
それによって，上のような解を求めていたわけだ．

GeoGebra の恐るべき因数分解能力である．

■　因数定理による因数分解を不可能と思わせる 3 次式であったが，実は $\sqrt{\quad}$ を含んだ値 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ を代入したら OK だったということに他ならない．

■　GeoGebra が「2 次曲線に強い」ことを，操作していて実感する．例えば，座標平面上に 5 点をとり，それらを通る 2 次曲線を表示させることが可能だし，その方程式までも表示する．

その意味で，GeoGebra は，もしかするとだが，2 次の無理数を処理する特別な能力を備えているのかも知れない．



2016 年 11 月 15 日