雑感　整数から逃げたい！

■　入試問題に整数問題が目白押しである.『大学への数学』2019 年 9 月号の特集テーマは，ズバリ「整数をあきらめない。」である.

整数問題はアプローチの仕方が様々あって，一筋縄でいかない問題が少なくない．それだけに，ある程度基本事項を勉強してもそれだけでは太刀打ちできないような問題もあり，「整数から逃げたい」「整数をあきらめたい」という気持ちもわからないではない.

■　『大学への数学』2019 年 9 月号が取り上げた多くの整数に関する問題の中で，難易度が最も高かったと位置付けたのが，早稲田商学部の次の問題で，D ランクである.

次の条件を満たす整数 n を 100 で割った余りは $\boxed{}$ である.

$$n \leq (5+2\sqrt{5})^{2019} < n+1$$

パット見，「$5-2\sqrt{5}$ も使うのだろうな，2 項定理の利用もあるかも」程度のことは思っても，先までずっと見通せるわけではない.

『大学への数学』は「整数の話に帰着させるには $5+2\sqrt{5}$ の共役 $5-2\sqrt{5}$ を持ち出します．これが 1 未満であることが肝です．しかし，ノーヒントで出題するとは….」とコメントしており，2 通りの解を載せている.

【その 1】2 項定理の利用（『大学への数学』の解答を参考にした）

$a_k = (5+2\sqrt{5})^k + (5-2\sqrt{5})^k$ とおく.

$(5\pm 2\sqrt{5})^{2019} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2019} {}_{2019}\mathrm{C}_j 5^{2019-j}(\pm 2\sqrt{5})^j$ の 2 式を加えると

$$a_{2019} = 2\sum_{j=0}^{1009} {}_{2019}\mathrm{C}_{2j} 5^{2019-2j}(2\sqrt{5})^{2j} = 2\sum_{j=0}^{1009} {}_{2019}\mathrm{C}_{2j} 5^{2019-2j}20^j = \sum_{j=0}^{1009} {}_{2019}\mathrm{C}_{2j} 5^{2018-2j}10\cdot 20^j$$

$$= 5^{2018}\cdot 10 + \underline{\underline{10({}_{2019}\mathrm{C}_2 5^{2016}20 + \cdots + 20^{1009})}}$$

となり，$\underline{\underline{}}$ 部分は 100 の倍数である.

よって，a_{2019} は整数であり，$a_{2019} \equiv 5^{2018}\cdot 10 \equiv 50 \pmod{100}$ である.

また，$0 < (5-2\sqrt{5})^{2019} < 1$ より，$\cdots 49 < (5+2\sqrt{5})^{2019} < \cdots 50$ となるから，$(5+2\sqrt{5})^{2019}$ を 100 で割った余りは 49 である.

【その 2】　$(5+2\sqrt{5})^k + (5-2\sqrt{5})^k = b_k$ の漸化式を作る（同上）

$\alpha = 5+2\sqrt{5},\ \beta = 5-2\sqrt{5}$ とおくと，$\alpha+\beta = 10,\ \alpha\beta = 5$ から，$5\pm 2\sqrt{5}$ は 2 次方程式 $x^2-10x+5=0$ の解で，$\alpha^2-10\alpha+5=0,\ \beta^2-10\beta+5=0$ を満たすことから，$\alpha^{k+2}-10\alpha^{k+1}+5\alpha^k=0,\ \beta^{k+2}-10\beta^{k+1}+5\beta^k=0$ を満たす.

$(5+2\sqrt{5})^k + (5-2\sqrt{5})^k = b_k$ とおけば，$b^{k+2}-10b^{k+1}+5b^k=0$ を満たす.

$b_1=10,\ b_2=90$ であることから，帰納的に b_k は整数であり，

$0<(5-2\sqrt{5})^{2019}<1$，$n \leq (5+2\sqrt{5})^{2019} < n+1$ を加えて $n < b_{2020} < n+2$ となり，b_{2020} が整数であるから，$b_{2020} = n+1$．以下，mod 100 で考えて

$b^{k+2} \equiv 10b^{k+1} - 5b^k$，$b_1 = 10 \equiv 10,\ b_2 \equiv 100-10 \equiv 90,\ b_3 \equiv 900-50 \equiv 50,$

$b_4 \equiv 500-450 = 50,\ b_5 \equiv 500-250 \equiv 50$ となるから，帰納的に

$b_k \equiv 50\ (k \geq 3)$ となる．したがって，$n = b_{2020}-1 \equiv 50-1 = 49$.

［$b_k \equiv 50\ (k\geq 3)$ であるから，$k \geq 3$ で $[(5+2\sqrt{5})^k] \equiv 49 \pmod{100}$ ］

う～む．楽でないなあ.

ちなみに，旺文社入試正解は<やや難>，東進は<標準>としているが，それらの評価は適切だろうか.

■　この問題を少し一般化して，$[(m^2+1+m\sqrt{m^2+1})^k] \pmod{100}$ を考えてみると興味深い結果が得られる．なお，m は自然数である.

$A_k = (m^2+1+m\sqrt{m^2+1})^k + (m^2+1-m\sqrt{m^2+1})^k$ は，$0 < m^2+1-m\sqrt{m^2+1} < 1$，

$A_1 = 2(m^2+1),\ A_2 = 2(m^2+1)(2m^2+1)$，$A_{k+2} = 2(m^2+1)A_{k+1} - (m^2+1)A_k$

を満たし，一定大きな自然数 k に対して，A_k は $2(m^2+1)^2$ の倍数になる.

上の問題は $m=2$ の場合であり，一定大きな自然数 k に対して A_k が 50 の倍数になり，下 2 桁は 50 となって上の $n=49$ という結果が得られる.

$m=3$ の場合は 100 の倍数となるため，$n=99$ となる.

さらに一般の場合について述べれば

$m \equiv \pm 2 \pmod{10}$ のとき，$n=49$ ；$m \equiv \pm 3 \pmod{10}$ のとき，$n=99$ ；

$m \equiv 5 \pmod{10}$ のとき，$n=51$ ；$m \equiv 0 \pmod{10}$ のとき，$n=1$

となると思われる.

2019 年 09 月 15 日