雑感　m.0x…という数

■　どうでも良いことだが，本日 3 月 14 日は「数学の日」であり，「円周率の日」でもある．以下は，これとは無関係．

■　2019 年名古屋大学の理系，第 3 問．

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする．
(1) このような n の中で最小のものを求めよ．
(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ．

■　「その正の平方根が整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるような正の整数」という条件を P とする．

■　問題の内容を理解するために，少し調べてみよう．試験では電卓は使えないが，ここでは電卓を少し使って調べる．

条件 P を満たす数は，正の整数 m に対して，$\sqrt{m^2}$ より少し大きい数であるから，例えば $\sqrt{m^2+1}$ のような数である可能性がある．

しかし，$m=1,\ 2,\ 3$ に対する $\sqrt{m^2+1}$ の値はそれぞれ，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{5}=2.236\cdots$，$\sqrt{10}=3.162\cdots$ であるから，これらは条件を満たさない．もう少し大きい m である必要がある．さらに計算してみると，$\sqrt{4^2+1}=4.123\cdots$，$\sqrt{5^2+1}=5.099\cdots$ であり，結果的にだが $5^2+1=26$ が(1)の答えになっている．

■　さて，ここでさらに考えるべきことが幾つかある．

(i) $\sqrt{m^2+k}$ の形の数で，$2\le k\le (m+1)^2-m^2-1=2m$ のものも考える必要がある．このとき，1 つの m に対して，複数の k の値で条件 P を満たす数があり得る．

(ii) m が一定大きくなると，$\sqrt{m^2+1}$ が条件 P を満たさなくなる．

これらのことは，次の表を見れば諒解できる．表は，青を m，緑を k とする $\sqrt{m^2+k}$ の値（小数は切り捨て表示している）であり，赤のセルが条件 P を満たす数である．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.4142	1.7320										
2	2.2360	2.4494	2.6457	2.8284								
3	3.1622	3.3166	3.4641	3.6055	3.7416	3.8729						
4	4.1231	4.2426	4.3588	4.4721	4.5825	4.6904	4.7958	4.8989				
5	5.0990	5.1961	5.2915	5.3851	5.4772	5.5677	5.6568	5.7445	5.8309	5.9160		
6	6.0827	6.1644	6.2449	6.3245	6.4031	6.4807	6.5574	6.6332	6.7082	6.7823	6.8556	6.9282
7	7.0710	7.1414	7.2111	7.2801	7.3484	7.4161	7.4833	7.5498	7.6157	7.6811	7.7459	7.8102
8	8.0622	8.1240	8.1853	8.2462	8.3066	8.3666	8.4261	8.4852	8.5440	8.6023	8.6602	8.7177
9	9.0553	9.1104	9.1651	9.2195	9.2736	9.3273	9.3808	9.4339	9.4868	9.5393	9.5916	9.6436
10	10.0498	10.0995	10.1488	10.1980	10.2469	10.2956	10.3440	10.3923	10.4403	10.4880	10.5356	10.5830
11	11.0453	11.0905	11.1355	11.1803	11.2249	11.2694	11.3137	11.3578	11.4017	11.4455	11.4891	11.5325
12	12.0415	12.0830	12.1243	12.1655	12.2065	12.2474	12.2882	12.3288	12.3693	12.4096	12.4498	12.4899
13	13.0384	13.0766	13.1148	13.1529	13.1909	13.2287	13.2664	13.3041	13.3416	13.3790	13.4164	13.4536
14	14.0356	14.0712	14.1067	14.1421	14.1774	14.2126	14.2478	14.2828	14.3178	14.3527	14.3874	14.4222
15	15.0332	15.0665	15.0996	15.1327	15.1657	15.1986	15.2315	15.2643	15.2970	15.3297	15.3622	15.3948
16	16.0312	16.0623	16.0934	16.1245	16.1554	16.1864	16.2172	16.2480	16.2788	16.3095	16.3401	16.3707
17	17.0293	17.0587	17.0880	17.1172	17.1464	17.1755	17.2046	17.2336	17.2626	17.2916	17.3205	17.3493
18	18.0277	18.0554	18.0831	18.1107	18.1383	18.1659	18.1934	18.2208	18.2482	18.2756	18.3030	18.3303
19	19.0262	19.0525	19.0787	19.1049	19.1311	19.1572	19.1833	19.2093	19.2353	19.2613	19.2873	19.3132
20	20.0249	20.0499	20.0748	20.0997	20.1246	20.1494	20.1742	20.1990	20.2237	20.2484	20.2731	20.2977
21	21.0237	21.0475	21.0713	21.0950	21.1187	21.1423	21.1660	21.1896	21.2132	21.2367	21.2602	21.2837
22	22.0227	22.0454	22.0680	22.0907	22.1133	22.1359	22.1585	22.1810	22.2036	22.2261	22.2485	22.2710
23	23.0217	23.0434	23.0651	23.0867	23.1084	23.1300	23.1516	23.1732	23.1948	23.2163	23.2379	23.2594
24	24.0208	24.0416	24.0624	24.0831	24.1039	24.1246	24.1453	24.1660	24.1867	24.2074	24.2280	24.2487
25	25.0199	25.0399	25.0599	25.0798	25.0998	25.1197	25.1396	25.1594	25.1793	25.1992	25.2190	25.2388
26	26.0192	26.0384	26.0576	26.0768	26.0959	26.1151	26.1342	26.1533	26.1725	26.1916	26.2106	26.2297
27	27.0185	27.0370	27.0554	27.0739	27.0924	27.1108	27.1293	27.1477	27.1661	27.1845	27.2029	27.2213
28	28.0178	28.0356	28.0535	28.0713	28.0891	28.1069	28.1247	28.1424	28.1602	28.1780	28.1957	28.2134
29	29.0172	29.0344	29.0516	29.0688	29.0860	29.1032	29.1204	29.1376	29.1547	29.1719	29.1890	29.2061
30	30.0166	30.0333	30.0499	30.0665	30.0832	30.0998	30.1164	30.1330	30.1496	30.1662	30.1827	30.1993
31	31.0161	31.0322	31.0483	31.0644	31.0805	31.0966	31.1126	31.1287	31.1448	31.1608	31.1769	31.1929
32	32.0156	32.0312	32.0468	32.0624	32.0780	32.0936	32.1091	32.1247	32.1403	32.1558	32.1714	32.1869
33	33.0151	33.0302	33.0454	33.0605	33.0756	33.0907	33.1058	33.1209	33.1360	33.1511	33.1662	33.1813
34	34.0147	34.0293	34.0440	34.0587	34.0734	34.0881	34.1027	34.1174	34.1320	34.1467	34.1613	34.1760
35	35.0142	35.0285	35.0428	35.0570	35.0713	35.0856	35.0998	35.1140	35.1283	35.1425	35.1567	35.1710
36	36.0138	36.0277	36.0416	36.0555	36.0693	36.0832	36.0970	36.1109	36.1247	36.1386	36.1524	36.1662
37	37.0135	37.0270	37.0405	37.0540	37.0675	37.0809	37.0944	37.1079	37.1214	37.1348	37.1483	37.1618
38	38.0131	38.0263	38.0394	38.0525	38.0657	38.0788	38.0919	38.1051	38.1182	38.1313	38.1444	38.1575
39	39.0128	39.0256	39.0384	39.0512	39.0640	39.0768	39.0896	39.1024	39.1152	39.1279	39.1407	39.1535
40	40.0124	40.0249	40.0374	40.0499	40.0624	40.0749	40.0874	40.0998	40.1123	40.1248	40.1372	40.1497
41	41.0121	41.0243	41.0365	41.0487	41.0609	41.0731	41.0852	41.0974	41.1096	41.1217	41.1339	41.1460
42	42.0119	42.0238	42.0356	42.0475	42.0594	42.0713	42.0832	42.0951	42.1070	42.1188	42.1307	42.1426
43	43.0116	43.0232	43.0348	43.0464	43.0581	43.0697	43.0813	43.0929	43.1045	43.1161	43.1277	43.1393
44	44.0113	44.0227	44.0340	44.0454	44.0567	44.0681	44.0794	44.0908	44.1021	44.1134	44.1248	44.1361
45	45.0111	45.0222	45.0333	45.0444	45.0555	45.0666	45.0777	45.0888	45.0998	45.1109	45.1220	45.1331
46	46.0108	46.0217	46.0325	46.0434	46.0543	46.0651	46.0760	46.0868	46.0977	46.1085	46.1194	46.1302
47	47.0106	47.0212	47.0319	47.0425	47.0531	47.0637	47.0744	47.0850	47.0956	47.1062	47.1168	47.1274
48	48.0104	48.0208	48.0312	48.0416	48.0520	48.0624	48.0728	48.0832	48.0936	48.1040	48.1144	48.1248
49	49.0102	49.0204	49.0306	49.0407	49.0509	49.0611	49.0713	49.0815	49.0917	49.1019	49.1121	49.1222
50	50.0099	50.0199	50.0299	50.0399	50.0499	50.0599	50.0699	50.0799	50.0899	50.0999	50.1098	50.1198
51	51.0098	51.0196	51.0294	51.0392	51.0489	51.0587	51.0685	51.0783	51.0881	51.0979	51.1077	51.1175
52	52.0096	52.0192	52.0288	52.0384	52.0480	52.0576	52.0672	52.0768	52.0864	52.0960	52.1056	52.1152
53	53.0094	53.0188	53.0282	53.0377	53.0471	53.0565	53.0659	53.0754	53.0848	53.0942	53.1036	53.1130
54	54.0092	54.0185	54.0277	54.0370	54.0462	54.0555	54.0647	54.0740	54.0832	54.0925	54.1017	54.1109
55	55.0090	55.0181	55.0272	55.0363	55.0454	55.0545	55.0635	55.0726	55.0817	55.0908	55.0999	55.1089
56	56.0089	56.0178	56.0267	56.0357	56.0446	56.0535	56.0624	56.0713	56.0802	56.0892	56.0981	56.1070
57	57.0087	57.0175	57.0263	57.0350	57.0438	57.0526	57.0613	57.0701	57.0788	57.0876	57.0964	57.1051
58	58.0086	58.0172	58.0258	58.0344	58.0430	58.0517	58.0603	58.0689	58.0775	58.0861	58.0947	58.1033
59	59.0084	59.0169	59.0254	59.0338	59.0423	59.0508	59.0592	59.0677	59.0762	59.0846	59.0931	59.1016
60	60.0083	60.0166	60.0249	60.0333	60.0416	60.0499	60.0583	60.0666	60.0749	60.0832	60.0915	60.0999

(i)は $m=10$ 以上で起きている*⁾.

(ii)は $m=50$ 以上で起こる**⁾．このことは，$\sqrt{m^2+k}$ でも次々起こることである．

■　以上を踏まえてこの問題は解かれる必要がある．
解答を作ってみよう．

整数部分が $m\ (\ge 1)$ で条件 P を満たす数は，$\sqrt{m^2+k}$ の形の数であり，自然数 k は $1\le k\le (m+1)^2-m^2-1=2m$ を満たす必要がある．

この数が条件 P を満たすから

$m+0.01\le\sqrt{m^2+k}<m+0.1$ を満たし，各辺が正だから

$(m+0.01)^2\le m^2+k<(m+0.1)^2$ より，

$0.02m+0.0001\le k<0.2m+0.01$ ……①

である．

したがって，整数部分が $m\ (\ge 1)$ であって条件 P を満たす数の個数を $d(m)$ とすれば，①より

$d(m)=[0.2m+0.01]-[0.02m+0.0001]$ であるが，m が自然数であることを考慮すれば，

$d(m)=[0.2m]-[0.02m]$ ……②

とできる．ここに，[　] はガウス記号である．

$1\le m\le 4$ において $d(m)=0$，

$5\le m\le 9$ において $d(m)=1$，

$10\le m\le 14$ において $[0.02m]=0$ で $d(m)=2$ であるから

(1)は $m=5,\ k=1$ の場合であり，求める $n=5^2+1=26$．

(2)は $\sum_{m=5}^{9} d(m)=5$，$\sum_{m=10}^{11} d(m)=4$ から $m=12,\ k=1$ の場合であり，求める $n=12^2+1=145$．

■　*⁾は②式によって，m の値から定まっていく．

$m=10$ のとき，$d(10)=[2]-[0.2]=2$ である．

$m=50$ のとき，$d(10)=[10]-[1]=9$ となって，表と合っている．

**⁾は，$[0.02m]\ge 1$ の場合に起こり，このようなことが起こる最小の m は，$0.02m=1$ から $m=50$ である．

■　左の表で赤い部分の右側の階段の高さが 5 ずつである．これは，$[0.2m]$ の値の変化に対応している．

同様に，左側は $[0.02m]$ の値の変化に対応して，50 ずつの高さで削られていく．

2019 年 03 月 14 日