雑感　行列・1 次変換を習っていれば…

■　2019 年名古屋大学の文系．出題は 3 題．河合塾の分析に拠れば
【1】標準　　【2】難　　【3】やや難
とある．その【2】を見てみる．

■　問題は以下の通り．

非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする． P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし， P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ と P_{n+1} の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ は

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - k(y_n + y_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + k(x_n + x_{n+1}) \end{cases}$$

を満たすとする．ただし， k を正の実数とする．

(1) $k = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とする．ただし， $0 < \alpha < \pi$ とする．このとき P_1， P_2 の座標 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を α を用いて表せ．

(2) P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ を(1)の α と n を用いて表せ．

(3) O を xy 平面の原点とするとき，三角形 $P_n\,O\,P_{n+1}$ の面積を， k を用いて表せ．

■　与えられた連立漸化式は，どう見ても行列表示をしたくなる．
しかし，現在の殆どの受験生は行列やその扱いを知らない．

■　与連立漸化式は移項して行列表示すれば

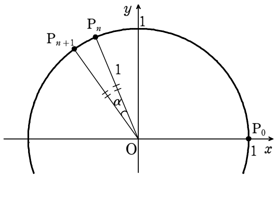
$\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ となるから， $\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を両辺の左から掛けて $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ …①　となる．

ここで， $\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+k^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} & -\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}} \\ \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{1+k^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

とすることができ，①は $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ …②
となる．

なお， $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ で， $k > 0$ より $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．また， $1+k^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であり， $1+k^2 = 1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$ である． $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$， $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$ であり，結局②は

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ となる．



すなわち，点 P_{n+1} は点 P_n を O 中心に角 α だけ回転させた点に過ぎない．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

であるから，(2)の答えは $(x_n,\ y_n) = (\cos n\alpha,\ \sin n\alpha)$，

(3)のそれは $\dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\alpha = \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \tan\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = k\cdot\dfrac{1}{1+k^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$

と，容易に求めることができる．

■　「難問」とあったから，どんなに難しいのかと見てみた．

行列・1 次変換を習っていない受験生であれば，確かに計算に手こずるかも知れない．連立方程式を解くプロセスは煩雑だし，回転行列 $R(a)$ に対して $R(\alpha)^n = R(n\alpha)$ に相当する式を（帰納法で）示す部分など煩わしかろう．

しかし，行列・1 次変換を習っていれば難問でもなく，極めて標準的な問題に過ぎないのであった．

行列というツールの偉大さを改めて実感する．

一方，出題者の手抜き的な印象を免れない問題でもある．

2019 年 05 月 15 日