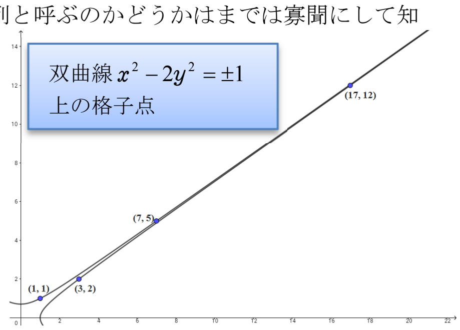
雑感　フィボナッチ数列の類似数列

■　隣接 3 項間の線型の漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ によって定められるフィボナッチ数列については，多くを記す必要はないだろう．

　では，同様の漸化式 $a_{n+2}=3a_{n+1}+a_n$，$a_1=1$，$a_2=2$（適当に係数 3 をつけてみただけ）によって定められる数列 $1,\ 2,\ 7,\ 23,\ 76,\ \cdots$ には，何か名前とかがあって研究されているのだろうか．多分だが，ないと思う．

　しかし，$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$，$a_1=1$，$a_2=2$ によって定められる数列 $1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ \cdots$ によって定義される値は，Pell 数と呼ばれるという．この数列を Pell 数列と呼ぶのかどうかはまでは寡聞にして知らないが，Pell 方程式 $x^2-2y^2=\pm1$ の自然数解 $(x,\ y)$ を小さい順に並べるとき，y が上の数列をなすことに由来する．こういった明確な意味のある性質を所有するから名前まで付けられ，研究がされる．



■　SSH の課題研究で，K 君はフィボナッチ数列の発展として，トリボナッチ数列の研究を行おうとした．$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$ という漸化式で定義されるこの数列は，一般項を求めるという高校生の研究を含め，幾つかの研究があるようだ（ちなみに，特性方程式は 3 次方程式 $x^3-x^2-x-1=0$ で，1 つの実数解と 2 つの虚数解を持つことにより，それらの解を用いた表示になる）．

　研究で同じことを行っても意味が薄いので,「もしトリボナッチで行くのならば，この数列がどういう場面で登場し，どういった問題解決に結びつくのかを含めて研究して欲しい」と要望を出した．

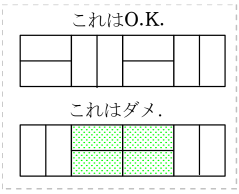
■　例えばフィボナッチ数列 $\{F_n\}$ で言えば，「1 回に 1 段または 2 段ずつ昇る階段昇りで，n の階段を昇る方法が F_n 通りある」などといったことである．

　この類似で，トリボナッチ数列 $\{T_n\}$ では「1 回に 1 段または 2 段または 3 段ずつ昇る階段昇りで n の階段を昇る方法が T_n 通りある」ということが得られるが，余りにベタで新鮮味がない．

　1×2 サイズの畳を $2\times n$ の部屋に敷く方法が，F_n（$F_1=1$，$F_2=2$）通りあることはよく知られている．これと T_n の関連などを考えていく中で，K 君は $N_{n+3}=N_{n+2}+N_n$，$N_1=N_2=1$，$N_3=2$ で定められる数列についての考察を始めた．

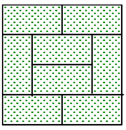
■　これは，1×3 サイズの畳を $3\times n$ の部屋に敷く方法が N_n 通りあることから，逆に漸化式を作ったのである．

　しかし，「1×3 サイズの畳にリアリティがないし，上の意味を持つと言うことだけでは物足りない」と伝えると，数日後，1×2 サイズの畳を $2\times(n-1)$ の部屋に敷く方法に関連していることを見つけたと言ってきた．



　彼によれば，1×2 サイズの畳を $2\times n$ の部屋に敷くが，そこに田の字の敷き方が含まれないような敷き方の数が N_{n+1} 通りあるというのである．

　何故かはお考えいただきたいが，例えば 8 畳の間に畳を敷くとき，田の字が表れないように右のように敷くのが流儀だったのではないか．とすれば，この数列に新たな意味が付与されたことになる．



■　発見を喜んでいる彼に水を差すような話になってしまうが，この数列には Narayana's cow 数列という名前がついていて，OEIS（当雑感 130 参照）において，A000930 に分類されている．畳の敷き方についても次の記述があり，残念ながら彼による新発見ではない．

Number of ways to arrange n-1 tatami mats in a 2 X (n-1) room such that no 4 meet at a point. For example, there are 6 ways to cover a 2 X 5 room, described by 11111, 2111, 1211, 1121, 1112, 212.

　なお，ここにはこの数列について，他の性質の記述もある．

2017 年 10 月 15 日