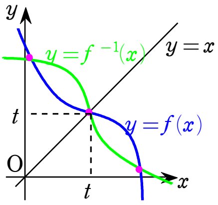
雑感　無理関数と逆関数の共有点

■　無理関数 $y=\sqrt{8-3x}$ とその逆関数 $y=\dfrac{8-x^2}{3}$ $(x\geqq 0)$ の共有点の座標を求めるために，$8-x^2=3\sqrt{8-3x}$ として，両辺を平方すると $(8-x^2)^2=9(8-3x)$ から $x^4-16x^2+27x-8=0$ …①となる．

なお，双方の定義域から，$0\leqq x\leqq \dfrac{8}{3}$ である．

しかし，因数定理を用いても①の 1 次因数が見つからない．

■　ところが，$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフが直線 $y=x$ と共有点をもち，その x 座標が $x=t$ であるとき，$t=f(t)$，$t=f^{-1}(t)$ であるから，方程式 $f(x)=x$ （または，$f^{-1}(x)=x$ ）の解が，方程式 $f(x)=f^{-1}(x)$ の解に含まれる．



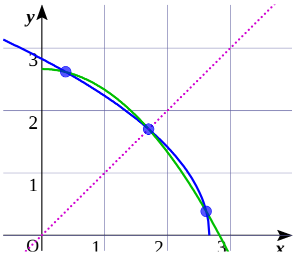
■　このことを用いると，①の解を次のように求めることが可能である．

$\sqrt{8-3x^2}=\dfrac{8-x^2}{3}$ の解のうち，$\dfrac{8-x^2}{3}=x$ を満たすものは，$x^2+3x-8=0$ の解であるから，①の左辺は 2 次式 x^2+3x-8 で割り切れる．実際割り算をすると，①は $(x^2+3x-8)(x^2-3x+1)=0$ となるから，これを解いて

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$ となり，

$0\leqq x\leqq\dfrac{8}{3}$ を満たすものから，

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}$ である．



■　一般に $\sqrt{ax+b}=\dfrac{x^2-b}{a}$ の解は，両辺を平方して得られる 4 次方程式 $x^4-2bx^2-a^3x-b(a^2-b)=0$ から求められるが，

$\dfrac{x^2-b}{a}=x$ から得られる 2 次方程式 $x^2-ax-b=0$ の解を含んでいて，左辺は x^2-ax-b を因数に持つ．実際，左辺は

$(x^2-ax-b)(x^2+ax+a^2-b)=0$ と因数分解できる．

したがって，共有点の座標が整数や有理数になるようにしたい場合は，$x^2-ax-b=0$，$x^2+ax+a^2-b=0$ の方程式が，定義域内にそのような解を持つようにすればよいことになる．

■　こういった解法を期待して次のような問題を出題した．

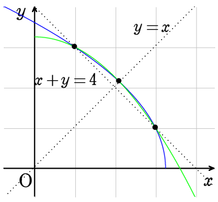
> $f(x)=\sqrt{13-4x}$ とする．
>
> (1)　$f^{-1}(x)$ を求めよ．
>
> (2)　方程式 $f(x)=x$ の解を求めよ．
>
> (3)　方程式 $f(x)=f^{-1}(x)$ の解を求めよ．

$f^{-1}(x)=\dfrac{13-x^2}{4}$ $(x\geqq 0)$ で，(3)は $0\leqq x\leqq\dfrac{13}{4}$ において

$\sqrt{13-4x}=\dfrac{13-x^2}{4}$ を解くことになる．両辺を平方して整とんすると，$x^4-26x^2+64x-39=0$ である．係数を調整しておいたので，因数定理で $x-1$，$x-3$ の因数を見つけた生徒も少なからずいる．

期待したような解はなかったが，逆に次のような考え方を教えられた．

$y=f(x)$ から $y=\sqrt{13-4x}$ より $y^2=13-4x$ である．また $y=f^{-1}(x)$ から $x^2=13-4y$ である．これらの差をとると，$(x-y)(x+y)=4(x-y)$ より $y-x=0$ または $x+y=4$ となるから，このそれぞれと $y=\sqrt{13-4x}$ あるいは



$y=\dfrac{13-x^2}{4}$ $(x\geqq 0)$ との共有点を求めるというものである．

もしかすると，こちらの方が自然な発想なのかも知れない．

2016 年 11 月 1 日