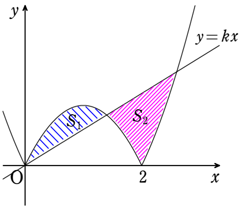
雑感　ある図形の面積に関わって

■　積分を用いて面積を求める問題で，次のような絶対値のついた 2 次関数の問題をよく見かける．

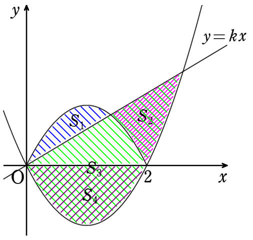
> k は定数で，$0<k<2$ とする．直線 $y=kx$ と曲線 $y=|x^2-2x|$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，k の値を求めよ．
> ＜2009　富山県立大＞

■　グラフを描けば右のようであり，$S_1=S_2$ となるように，k の値を定める．



　S_1 を求めるのに苦労はないが，S_2 をどうするかである．$x=2$ で左右に分けて定積分の式を作っての計算は，結構煩雑である．そこで，次のように考えると良いと，いくつかの雑誌や参考書は教える．

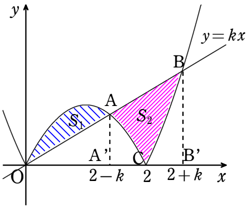
■　右のように S_3（グリーンの部分で，3 個所に分かれている）と S_4 を設定すると，



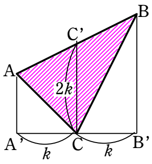
　「$S_2=S_3-2S_4+S_1$ である」…①
というものである．
　これを用いると，積分の計算は実質的に，よく知られた公式

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ …②　の利用だけで済んでしまい，確かに便利である．

■　2 つの直線と曲線の交点を図のように A，B とすれば，それらの x 座標はそれぞれ $2-k$，$2+k$ である．さらに，図のように x 軸上の点 A′，B′，C を設定すれば，実は

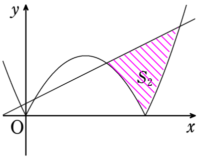


　$\boxed{S_2\text{ は△ABC の面積に等しい}}$．
　それは，線分 AC と放物線で囲む「弓形」と線分 BC と放物線で囲む「弓形」の面積が等しいからである（A′C＝B′C＝k で，公式②による）．
　これによって S_2 を求めるが，右図から容易に
$S_2=2k^2$ である．
（もちろん，台形 AA′B′B の面積から△AA′C と△BB′C の面積を引くとか，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の成分を用いて計算しても良い）



■　煩雑そうな S_2 がこんなに簡単に求めることができて，しかもとても単純な値になるのは驚きだが，これは直線 $y=kx$ が曲線 $y=|x^2-2x|$ の尖点を通るために，A′C＝B′C が成り立つという特別な場合だからである．

■　この方法はたとえば，右の S_2 の面積を求める問題では 2 つの「弓形」の面積が異なるので便利ではない．



　かと言って，①の利用ができるわけでもない．地道に計算するしかないのか．
　なお，このタイプの交点を格子点にする設定は，拙著『問題作りの道具箱』の中の $\boxed{2}$ を参照されたい．

■　元の問題に戻ると，$S_1=\dfrac{1}{6}(2-k)^3$，$S_2=2k^2$ で，$S_1=S_2$ とした方程式は，$k^3+6k^2+12k-8=0$ となり，左辺は簡単には

2012 年 8 月 28 日

因数分解できない．頑張って $k^3+6k^2+12k+8=16$ とし，$(k+2)^3=2\cdot 2^3$ から　$k+2=2\sqrt[3]{2}$ とせよというのは, いささか酷なような気がする．

ところが，①を用いると，$S_1=S_2$，$S_2=S_3-2S_4+S_1$ から $S_3=2S_4$ が得られ，$(2+k)^3=2\cdot 2^3$ という関係式が容易に得られる（もっとも，ここから k を求めるにあたって，展開して整とんするという愚挙に走る生徒が少なくないのだが…）．

■　問題の解法によって，その先が容易になるか難しくなるか分かれるということは世の常だが，大学入試問題ということを考慮に入れるとそう言い放って良いものかどうか…．

そこで，$S_1=S_2$ という条件の代わりに，$S_1:S_2$ の面積比を適切に設定して，k の値をもう少し容易に求められるようにできないだろうか.

$S_1:S_2=1:m$ とすると $m(2-k)^3-12k^2=0$ であり，この k の方程式が（たとえば）有理数の解をもつように m の値を定める．

そのためには k の値から決めるのが良く，$0<k<2$ に注意して，次のような m の値が見つかる．

k	m	方　程　式
1	12	$(k-1)(k^2-4k+8)=0$
$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	$(2k-1)(k+4)^2=0$
$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{4}$	$(3k-2)(k^2+12)=0$

このような設定の問題にすれば，解法によっての差は小さい．

2012 年 8 月 28 日