雑感　第 6 回 math コン受賞作のこと

■　第 6 回算数・数学の自由研究作品コンクール（math コン）の審査結果が, 昨年末, HP 上に公表された（http://www.rimse.or.jp/research/6th.html）.

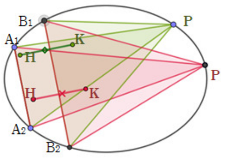
前に勤務していた高校の，3 年生理系の前期に行われる SSH 理科課題研究のちょっとした相談役（アドバイザ程のことでもない）的な指導を行っている．今回，Rimse 理事長賞を受賞した生徒はそこで指導した生徒であり，受賞が喜ばしい．

（ちなみに, 2 年前の第 4 回日本数学検定協会賞を受賞した生徒も，その年の SSH 理科課題研究の成果の受賞である）

■　受賞レポートのタイトルは「2 次曲線上の 3 点を頂点とする三角形の垂心について」であり, 彼は 2 つの定理を発見し, 証明した．

その定理は次の通り（細かい部分の省略がある）である．

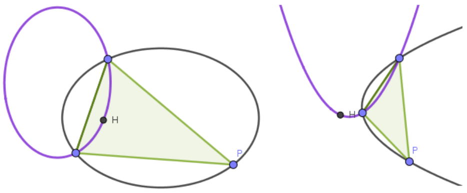
【定理 1】　1 つの 2 次曲線 C に対して，固定された 2 本の平行な弦 A_1A_2，B_1B_2 がある．C 上の動点 P に対して△A_1A_2P と△B_1B_2P の垂心をそれぞれ H，K とすると，線分 HK の長さは P の位置にかかわらず一定である．



これは，楕円で言えば図の緑と赤の P に対して，緑と赤の線分 HK の長さが等しい（◆＝×）ということである．

【定理 2】　2 次曲線 C の弦 A_1A_2 と C 上の動点 P に対して, △A_1A_2P の垂心 H の軌跡は，C と相似な 2 次曲線である．

見やすい楕円と放物線の場合の図を載せると，次のようになる．灰色が元の 2 次曲線，紫が垂心 H の軌跡である．



■　彼はどのようにしてこれらの定理を発見したのだろうか.

図形や関数のグラフなどを描いてくれる GeoGebra という優れたフリーソフトがあるが，4 月の授業開始以降，彼はこれを用いて三角形の垂心などについて様々な場合を調べていた．そして，6 月頃,「定理 1 が成り立ちそうだ」という予想を立てたのである．

さらに,「楕円なら軌跡は楕円のように，同じ種類の図形になっているみたいだ」と言っていたのだが，私が「離心率まで同じかどうか調べてみると良いかもね」と感想を述べ，定理 2 につながった．

予想が立てば，後は証明である．方程式を用いて証明するとすれば，方針そのものは難しくない．しかし，膨大な計算が待ち受けていることは想像に難くなく，初等的な証明では難しそうだ．

■　私は楕円について，弦の傾きが 1 の場合は計算で比較的簡単に示せたので, それを一般の傾きの場合に拡張して示すことができた．

しかし，彼は離心率を e とした一般的な式で取り組んでいた．その膨大な計算に彼は地道に粘り強く取り組み，何回も計算のやり直しもしていたのだった．彼の計算結果の検証のために同様に計算してみたが，半端なく大変なものだった．煩雑な場合分けなども適切に処理して証明を完成させたのが，40℃越えと言う記録的な猛暑の 8 月も終わろうという頃で，コンクールの締切が迫っていた．

■　すでに発見済の定理かも知れないという懸念があった．手元の『幾何学大辞典』(第 1～第 6 巻）の関係のありそうなところを調べたり，ネット検索もしてみた．しかし，いずれもヒットしなかったので，応募してもよかろうという判断をした．

■　このコンクールは都道府県単位での審査の後，そこを通過した作品が中央審査委員会で審査される．その委員会の講評は次の通りで，高い評価をいただいている（作品も HP で閲覧可能）．

この作品では，2 次曲線に成り立つ性質を発見し，それを定理として一般的な形で証明しています。これは発見と検証という数学研究の理想的な形で，見つけた性質を証明するために，具体的な座標を用いて地道に計算していることも評価できます。2 次曲線の性質を GeoGebra という作図ソフトで発見したことも現代らしく興味深いです。大学以上の数学を学ぶともっと世界が広がりますので，今後の発展も楽しみです。

2019 年 01 月 15 日