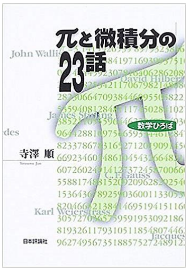
雑感　マチンの公式

■　マチンの公式と言われてピンと来ない人でも，

$\boxed{\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}}$ という式に記憶のある人は多いに違いない．これがマチン（John Machin：1680-1752）の公式である．

これに類する公式はいくつもあり，コンピュータによる π の近似値計算で，長く使われてきた．

■　SSH の課題研究で，数学分野を選び「π の近似値計算をしたい」という生徒がしばしば登場するが，「大学の先生などがいろいろ研究したりしているレベルの問題だから，できれば避けた方がよい」との立場でこれまで指導してきた．



なお，『π と微積分の 23 話』（寺澤順：日本評論社：2006）は，このテーマ研究をする意欲の高い高校生には打って付けの参考書である．

退職後，元勤務先で課題研究の数学選択者のちょっとした相談相手をボランティア的に行っているが，今年度 C 君がこのテーマで研究を始めた（事前指導ができなかったこともある）．

C 君はこのマチンの公式を改造して，「精度のよい」公式を考えたいというのである．ただ，マチンの公式は近似式ではないので，「精度」については arctan の値の計算上の「精度」程度の意味である．

■　マチンの公式を証明することは難しくはない．tan の加法定理，2 倍角の公式を使うだけのことである．

先日の中間発表会で，C 君はマチンの公式の改良版として，

$\dfrac{\pi}{4}=11\arctan\dfrac{1}{14}+\arctan\dfrac{5984041155}{5889508020409}\cdots*$ を導いていた．その説明の中で，$\dfrac{11}{14}=0.7857\cdots\approx\dfrac{\pi}{4}=0.7853\cdots$ が係数にかかわっていると指摘していた．$x\approx 0$ のとき，$\arctan x\approx x$ だからであるが，マチンの公式で言えば，$\dfrac{4}{5}=0.8\approx\dfrac{\pi}{4}=0.7853\cdots$ ということになる．

この流れで，$\dfrac{333}{106}=3.14150943\cdots$ から，$\dfrac{\pi}{4}\approx\dfrac{333}{424}$ を用いるというような，π のより精度のよい近似分数を使うという方向がありそうだ．しかし，この場合の $\dfrac{\pi}{4}=424\arctan\dfrac{1}{333}+\arctan\dfrac{p}{q}$ における p, q（当然，互いに素）は，ともに桁数が 800 桁を超え（加法定理を何 100 回も使って繁分数計算をするからか？）実用的ではない．

となれば，どういう方向を目指すのか．

■　マチンの公式を用いて π の近似値計算を行う場合，計算の煩雑ポイントは，arctan の値計算である．この計算については，一般に

$\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ というマクローリン展開が用いられる．

マチンの公式が長く π の近似計算に使われてきた理由に，

$\arctan\dfrac{1}{5}=\arctan\dfrac{2}{10}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2}{10}\right)^{2n+1}$ が指摘されている．

コンピュータのなかった時代（ほんの 50 年程前までそうだったわけだが…）筆算でこの級数計算を行うとき，分母が 10 の累乗計算は涙が出るほど有り難かったわけである．$\arctan(1/239)$ は収束が早いので，$\arctan(1/5)$ より少ない項までの和で十分であろう．

■　今の時代，さすがに筆算と言うことはなく，コンピュータの利用が前提である．とは言え，多くの桁数を正確に計算するということでいうと，（ソフトがいろいろあることはあるにしても）手頃なソフトは何にしたらよいのか？

木田祐司氏の多倍数計算用 BASIC「U-Basic」は Windows 上では動かないはずである．探すと，「十進 BASIC」というフリーソフトがあり，1000 桁までの計算が可能である．

これを用いてマチンの公式で π の近似値計算を行ってみると，級数計算で $n=713$ 程度までの和を計算すれば，1000 桁まで一致する．

この n の値を小さくできて，係数がクレージーでない公式を作ることが，C 君の当面の目標である．ちなみに改良版*では $n=435$ 程度で 1000 桁まで一致するので，すでに大幅な改善ではある．

1 つの手がかりが，$\arctan\dfrac{1}{s}=\arctan\dfrac{1}{s+t}+\arctan\dfrac{t}{s^2+st+1}$ などの関係式にありそうだと思っているのだが…．

2018 年 07 月 01 日