雑感　共通テストの三角関数

■　Benesse の「2021 共通テスト徹底分析」(正式名称は不詳)の数学部分を入手した．自己採点集計による設問ごとの正答率などが掲載されている．
　初めての大学入試共通テストということもあり，追々，見て行く．
　今回は，数学 IIB の第 1 問(必須問題)の最初の三角関数について．

■　右にその問題全文と，赤字で正答率を載せた．テーマは，三角関数の合成と，その最大値である．

■　(1)の合成は教科書に載っている基本．合成の場合の角もきちんと求まる設定で，当然だが正答率は高い．
　最大値となると正答率がガクンと落ちるのはなぜか．**ウ**の誤答の一番は②で，$\frac{\pi}{2}$だから，1 次関数感覚での誤答か．

■　(2)は，(1)の関数を一般化して，文字係数 p が登場する．
　実は，このように最初は具体的な値の係数にしておいて，次いで係数を一般化するという設定は，今回の IIB 第 2 問(1)，さらに(2)の関数の微分法･積分法でも見られるもので，特徴的である．

［1］(1)　次の問題Aについて考えよう．

$\boxed{\text{問題A}}$ 関数 $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}=\dfrac{1}{2}$　94%

であるから，三角関数の合成により

$y=\boxed{\text{イ}}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\right)$　97%

と変形できる．よって，y は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる．　62%

(2)　p を定数とし，次の問題Bについて考えよう．

$\boxed{\text{問題B}}$ 関数 $y=\sin\theta+p\cos\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

(i)　$p=0$ のとき，y は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．　91%

(ii)　$p>0$ のときは，加法定理
$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$
を用いると
$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\cos(\theta-\alpha)$　67%
と表すことができる．ただし，α は
$\sin\alpha=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$　41%　34%
を満たすものとする．このとき，y は $\theta=\boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる．　46%

(iii)　$p<0$ のとき，y は $\theta=\boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる．　23%

$\boxed{\text{キ}}$～$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ -1	① 1	② $-p$
③ p	④ $1-p$	⑤ $1+p$
⑥ $-p^2$	⑦ p^2	⑧ $1-p^2$
⑨ $1+p^2$	ⓐ $(1-p)^2$	ⓑ $(1+p)^2$

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ 0　① α　② $\dfrac{\pi}{2}$

■　(2)の(i)はさすがに，当然できる．
　ところが，(ii)では，三角関数の合成の cos バージョンである．思い起こせば，1998 年に右のような，多くの受験生を泣かせた曰くつきの設問があった．

$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$
を考える．
(3)　$g(\theta)=\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}\cos\left(\theta+\boxed{\text{トナ}}^\circ\right)$ と表せる．

　今回は，cos の加法定理の式をわざわざ載せて，ヒントとしている．

$$\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)$$

とさせたかったはずだが，これが有効なヒントにならなかったことが，正答率を見ても明らかである．係数の$\sqrt{1+p^2}$ は，sin バージョンと同じだから辛うじてできたが，α の sin，cos の値の正答率は悲惨である．
　$\sin\theta+p\cos\theta$ を 2 つのベクトル $\vec{u}=(p,1)$，$\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$ の内積ととらえ，そのなす角として$\theta-\alpha$ を考える方法もあるが，習熟していないとここから$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, $\cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ には至らない．
　また，sin バージョンに変換して，$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ の関係を使う手もあるが，文字係数であるため，分かりづらいという側面がある．
　公式を丸覚えするのではなく，導き方･考え方まで重視したいという意向が強くうかがえるが，実際には正答者の少なからぬ者が，「cos バージョンの公式を覚えておくと良い」という指導に従ったものだと推察する．

■　**コ**，**サ**の正答率が**ク**，**ケ**のそれよりも高いのは，sin バージョン感覚で正答した**キ**と，与えられた式の形によるものであり，問題としての適切性に疑問符が付く．

■　最後(iii)の$p<0$ のケースの正答率が 1/4 を割り込む．$p\cos\theta$ が，このケースでは単調増加で，当然$\sin\theta$ もそうだから，その和が単調増加であることに思い至らない．何か，別の式変形でも必要なのかと邪推して分からなくなっているのだろうか．

■　実は，$y=\sin\theta+p\cos\theta$ を微分して，$y'=\cos\theta-p\sin\theta$ より，$y'=0$とすると$\tan\theta=\frac{1}{p}$ であり，(ii)ではこのとき最大，(iii)では$y'>0$ から$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大であることが分かるから，これを用いれば早いが，数Ⅲの範囲である．

2021 年 05 月 01 日