雑感　出題者が描いたであろう図

■　2020 年京都大学の問題で，文理共通問題．

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=k.$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OY}$ は，$\overrightarrow{OX}$ と $\overrightarrow{OY}$ の内積を表す．

■　関係式が内積だけ．求めるのも内積の値．アプローチは様々あり得るだろうが，図を描けたらいいのにと思う．

第 1 の条件から，∠AOB＝∠COD＝$\pi/3$ であることはわかるが，あとはどうしたものか．

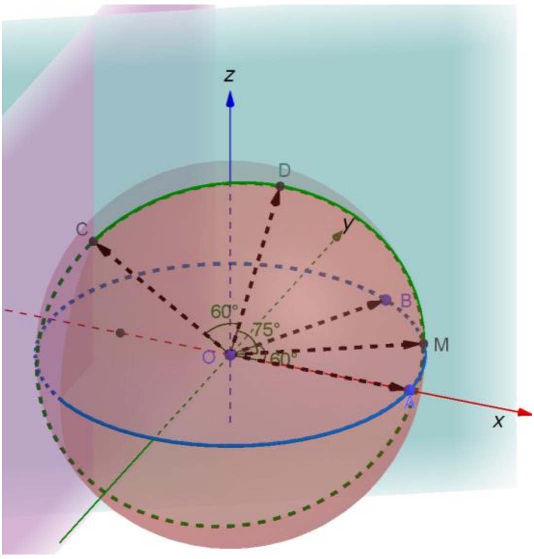
A, B は，∠AOB＝$\pi/3$ を満たすように適当に設定してよいが，残りの点 C, D はどうするか．

第 2 の条件，第 3 の条件の対称性から決まってくるはずである．

第 2 の条件から，C は線分 AB の垂直 2 等分平面 α 上にあり，この単位球面 S 上にもあるから，α と S の交円上に存在する．

そして，第 3 の条件から，D もその交円上にあって，∠COD＝$\pi/3$ を満たす点だが，2 つ存在しうる点のうち，$k>0$ から，∠AOD=∠BOD が鋭角であるものであろう．

■　以上をもとにして GeoGebra で描いてみると次のようになった．



M は弧 AB の中点である．ブルーが線分 AB の垂直 2 等分平面 α で，α と S の交円をグリーンで描いてある．

点 C の x 座標は，第 2 の関係式の $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ の値から，$-\frac{\sqrt{6}}{4}$ であり，平面 $x=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ は図の紫である．C はこの紫平面とグリーンの円との交点になる．

また，∠COD＝$\pi/3$ となる交円上の点は 2 つ存在するが，∠AOD が鋭角となるのは，図のような場合である．

■　一般に，単位球面上の点 P の座標は，xy 平面へ P から下ろした垂線の足を H とするとき，A(1, 0, 0), N(0, 0, 1)に対して∠AOH=ϕ，∠NOP=θ として P $(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ と表せるが，出題者的には A(1, 0, 0), B($\cos\pi/3, \sin\pi/3, 0$)，M($\cos\pi/6, \sin\pi/6, 0$)として，C については $\phi=\frac{\pi}{6}$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$ という設定にしたので，第 2 の関係式の内積の値が登場している．

また，∠COD＝$\pi/3$ であるため，D については $\phi=\frac{\pi}{6}$, $\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$ の設定になったのであろう．

これによって，D の座標は $\left(\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{12}\right)$ すなわち $\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$ となり，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}$ の内積の値から，$k\,(>0)$ の値が，D の x 座標に等しい値として求まる．

■　出題者はこういった図を描きながら，作問を進めたということだろうと思われる．

2020 年 07 月 01 日