雑感　極方程式に関するあれこれ

■　若い教員から「数学Ⅲの極座標は，何を指導したらよいのか，目標をどこに設定したらよいのか，ポイントの設定が今ひとつ明瞭でないのですが…」との質問を受けた．

授業で教える機会が初めてであれば，こういった感想も頷ける．

確かに教科書に書かれていることをさらりと授業するだけならば出来なくはない．しかし，さらに発展させたときのことを考えてみると，傍用の問題集でもあまり突っ込んだ問題はない．

■　教科書ではまず極座標が定義され，直交座標との変換が述べられる．次いで極方程式について，円 $r=a$, $r=2a\cos\theta$，直線 $\theta=\alpha$，$r=\dfrac{a}{\cos\theta}$ などの平易な図形の方程式が例示される．

一般的な直線 $r\cos(\theta-\alpha)=a$ などは，節末問題扱いである．

さらに，直交座標表示の曲線と極座標表示の曲線について，相互の変換が扱われる．そして，極を焦点の 1 つとする 2 次曲線が例示されて終わる．

■　悩ましい分野であることは間違いない．

教科書の内容に＋αし，ポイントを明瞭にすれば次のようなことになるのだろうか．

○極方程式では，三角比などの知識を動員させ，余弦定理，正弦定理なども用いて，r と θ の関係式を導くこと．

○2 次曲線が極方程式で統一的，簡潔に表現できて，それを用いると極めて簡潔に解くことの出来る問題があるので，そういった問題に習熟する．

○極座標では考えづらい難しい問題に遭遇したら，やむを得ず直交座標に変換して考えるが，極座標での処理を極力追求する．

■　ところで，問題集に次のような問題が，例題として載っている．

極座標が $(\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3}/2,\ \pi/3)$ である点をそれぞれ A，B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ．

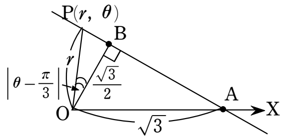
この問題集の解答は，A，B を直交座標に変換し，そこで直交座標での方程式 $x+\sqrt{3}y=\sqrt{3}$ を求め，これを極座標に変換して $r(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)=\sqrt{3}$ を答としている．

極座標の意味が何もないような，問題のための問題でしかないような印象を受ける解答である．

実際には図示すれば明らかなように，

△OBP から，$r\cos\left|\theta-\dfrac{\pi}{3}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で一発のはずである．



実際は簡潔な解答があるにもかかわらず，直交座標に変換して極座標に変換してという迂遠な方法が紹介されているという，最後の手段のためのような解答である．

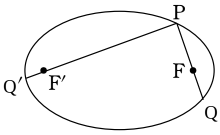
■　この範囲の試験問題作成は頭が痛い．できれば直交座標経由でない問題を出題したいと考えたとき，2 次曲線の焦点を通る弦（焦点弦）の長さに関する有名問題を手がかりにすることが多い．

例えば 2 次曲線の 1 つの焦点 F を通る弦 AB，CD について，

$\dfrac{1}{\mathrm{FA}}+\dfrac{1}{\mathrm{FB}}$ が一定，AB⊥CD のとき $\dfrac{1}{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{\mathrm{CD}}$ が一定を示させることは問題集にも載っている．

発展的な内容としては，右図において，

$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FQ}}+\dfrac{\mathrm{PF'}}{\mathrm{F'Q'}}$ が一定という問題は，楕円の性質 PF＋PF'が一定の関係も用いて示すもので，総合的である．



また，∠AFB＝α（$\pi/2$ や $\pi/3$ など）として，$\dfrac{1}{\mathrm{FA}}+\dfrac{1}{\mathrm{FB}}$ の値の最大値や最小値を問う問題なども考えられる．

■　昨年の定期考査には，次のような出題をした．

極座標が $(1,\ \pi/3)$ である点 A が中心で極 O を通る円を C とし，C と直線 OA の交点のうち，O と異なる点を B とする．

(1)　円 C の極方程式を求めよ．

(2)　B における C の接線 l の極方程式を求めよ．

(3)　C, l，始線で囲まれた図形のうち，C の外部にある部分の面積を求めよ．

2017 年 02 月 15 日