

## 交差する 2 円柱の共通部分の図示

■ 「交差する 2 円柱の共通部分」と聞けば、半径の等しい 2 円柱が直交していて、その共通部分の体積を積分で求めるという問題がすぐに思い浮かぶであろう。この立体の図示は容易ではないが、ググればいくらでもその図が見つかるので、必要ならばコピーで済ますこともできなくはない。

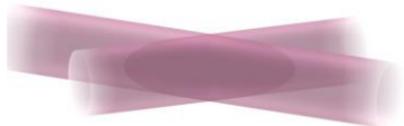
■ しかし、半径の等しい 2 円柱が 45° の角で交差している場合は、探してもなかなか見つからない。

チャートにこの立体の体積を求める問題が載っていて、この立体を切った後の立体図を色んな角度からみたいのですが、どなたか作っていただけませんか？

という質問が、例の Yahoo 知恵袋に載った。

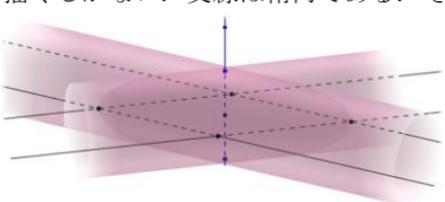
■ GeoGebra で作図してみようと試みたが、なかなかハードルが高い。

まず、1つの円柱は、 $x^2 + z^2 = 1$  で良いが、これと 45° の角で交差する円柱はどうすればよいか？ 軸を  $x = y, z = 0$  とすると、この円柱上の点  $P(x, y, z)$  が、軸上の点  $H(t, t, 0)$  に対して、 $PH \perp$  軸、 $PH=1$  として、  
 $2t = x + y, (x-t)^2 + y-t^2 + z^2 = 1$   
 から、 $(x-y)^2 + 2z^2 = 2$  となる。

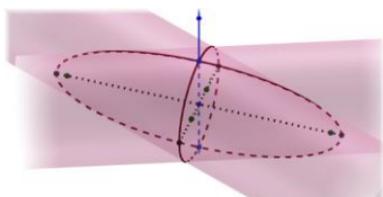


■ 次に共通部分をどのように表示したらよいか？

GeoGebra には、2 曲面の交線を表示させる機能があるが、複雑な曲面の場合は表示してくれない。果たして、この 2 円柱についても交線を表示してくれない。ということは、自分で描くしかない。交線は楕円である。その頂点を図示させることにし、円柱の軸の左右の直線求めて表示させた。これらの交点として、2 つの楕円の合計 4 個の頂点が表示され、z 軸と円柱の 2 交点と併せて、楕円の頂点が求まる。

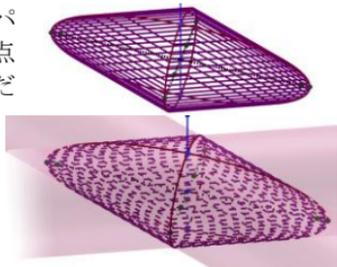


■ 楕円の長軸、短軸の長さから、焦点の位置を定めて、2 つの楕円を描くと右のようになる(結構、面倒)。

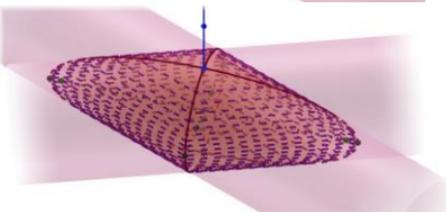


この立体は 4 つの曲面を張り合わせた形だが、楕円はその張り合わせ曲線になり、そこで角張っている。そういった形状が分かっているならば、これでほぼ十分な図だが、分かっていない質問者には、共通部分をもう少し鮮明にせねばなるまい。どうしたものか？

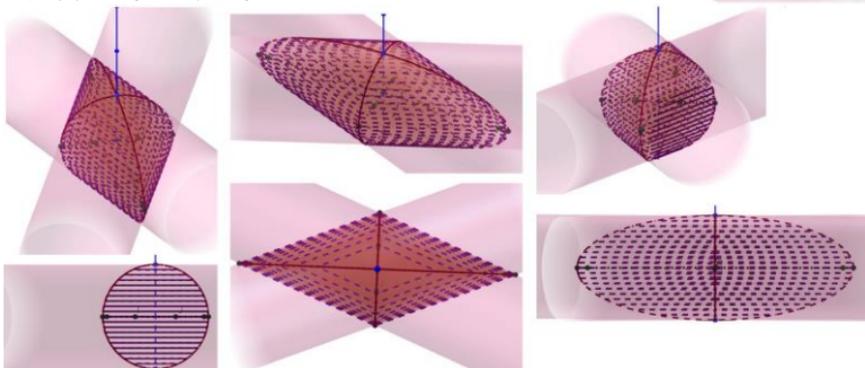
■ 一晩寝て、目覚めに方法を思いついた。パラメータ  $u$  を設定し、平面  $z = u$  と楕円との交点を表示して、それと楕円の交点を求めて結んだ四角形(この場合はひし形)を描いて残像表示し、 $-1 \leq u \leq 1$  で動かせばよい。円柱を消して作業すると、右上のようになった。陰線処理ができないため、分かりづらい図なので、円柱を復活させると少しマシになった。



もう一息。断面のひし形を輪郭だけでなく、中を薄く色づけしたらどうか。これで、それらしくなった。完成としてよからう。



■ 質問者のご要望に沿って、様々な方向から見てみよう。



■ なお、この立体は、正弦曲線を用いて展開図を描くことができ、4 枚を張り合わせて(右図はそのうちの 2 枚)、その立体を作ることも可能だ。

