雑感　高次方程式の解

■　2 年生理系の早朝補習を担当している同僚から，「この問題のこの（模範）解答のこの部分はどういうことですかねぇ？」と質問を受けた．問題を正確には再現できないが，内容的には次のような問題である．

> 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ が $1<x<2$ の範囲に実数解を持ち，その実数解は無理数であることを示せ．

解答としては，$f(x)=x^3-3x+1$ とおいて，$f(1)<0,\ f(2)>0$ で，中間値の定理により $1<x<2$ の範囲に実数解を持つ．

その実数解が有理数であるとして，$\dfrac{p}{q}$（$p,\ q$ は互いに素な整数）とおくと，整数でないから $q\geqq 2$ とできる．

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^3-3\left(\dfrac{p}{q}\right)+1=0$ から $p^3-3pq^2+q^3=0$ となり，ここから矛盾を導くという流れである．

（模範）解答は $p^3=q^2(3p-q)$ として，p の素因数に着目して矛盾を導こうとしていたが，分かりづらいものであった．

■　この同僚と話しながら，結局これが分かりやすいでしょうと落ち着いたのが，次のような証明である．

その実数解が有理数であるとして，$\dfrac{p}{q}$（$p,\ q$ は互いに素な整数で，$q>0$）とおくと，整数でないから $q\geqq 2$ である．

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^3-3\left(\dfrac{p}{q}\right)+1=0$ から，$\dfrac{p^3}{q^2}=3p-q$　…　①

①の右辺は整数であり，①の左辺は $p,\ q$ が互いに素で，$q\geqq 2$ であるから整数でない．よって矛盾．

■　考えてみると，最高次の係数が 1 である高次方程式を因数定理で解こうとするとき，定数項の約数すべてを代入しても解が見つからなければ，因数定理ではその高次方程式を解くことができない．しかし，実数解があるという場合，その実数解は有理数解ではありえず，無理数なのだということは感覚的に分かっていたことである．

これまで，きちんと証明したことはなかったが，上と同様にすれば示すことは容易なことである．

■　一般化して次のことが成り立つ．

> $n\geqq 2$ とする．整数係数の方程式
> $$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$
> が整数でない実数解 r をもつとき，r は無理数である．

《証明》r が無理数でないと仮定し，$r=\dfrac{p}{q}$（$p,\ q$ は互いに素な整数で，$q>0$）とおくと，整数でないから $q\geqq 2$ である．

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1}+a_2\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$ が成り立ち，これから　$-\dfrac{p^n}{q}=a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\cdots\cdots+a_nq^{n-1}$　…　②

②の右辺は，$a_k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$p,\ q$ が整数であるから整数．一方，左辺は $p,\ q$ が互いに素で，$q\geqq 2$ であるから整数でない．よって矛盾．

■　老婆心ながら付言すれば，上の高次方程式は，最高次の係数が 1（monic とか言うのだったかな）であることに注意したい．