雑感　パップス・ギュルダンの定理と独楽

■　積分で回転体の体積を指導したとき，パップス・ギュルダンの定理に触れる．多くの場合教科書にトーラスの体積を求める例題があり，その体積にかかわって話をする．教科書によっては，この定理についての記載があることもある．

■　授業が終わると，早速生徒たちがやってくる．「先生，試験で使っても良いですか？」

積分を使わずに回転体の体積が求まるのだから，魅力的な定理で，これを使わない手はないとの考えだ．

「う～ん，検算に使うだけだね」

「えー，知っている定理は使っても良いんじゃなかったですかー」

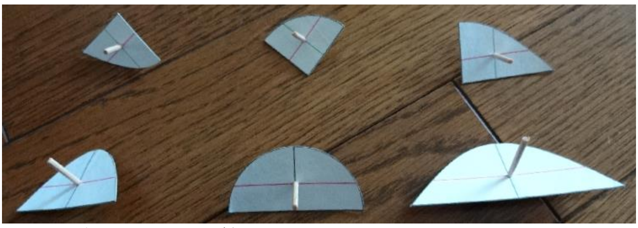
「じゃあね，証明できたら使って良いよ．そもそも，一般の平面図形の重心の定義式を知ってる？」

「あー，そうかあ」

■　次の時間，手作りの独楽を持参する．

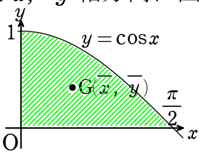
この定理を仮定すれば，簡単な図形の重心の座標を求める（逆算する）ことができるから，そこに軸を刺せばきれいに回る．

■　左は放物線独楽，中央上は四分円独楽，中央下は半円独楽，右は余弦独楽．



余弦独楽について計算を載せる．

$y=\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と両軸で囲む図形を x，y 軸方向に回転させた回転体の体積をそれぞれ V_x，V_y とする．図形の面積 $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ で，



$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi^2}{4}$，$V_x=2\pi\bar{y}S$ であるから，$\bar{y}=\frac{\pi}{8}$．

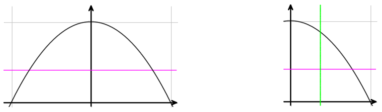
$V_y=\pi\int_0^1\arccos^2 x dx=\pi(\pi-2)$，$V_y=2\pi\bar{x}S$ であるから，

$2\pi\bar{x}=\pi(\pi-2)$ より，$\bar{x}=\frac{\pi}{2}-1$ で，$\mathrm{G}\left(\frac{\pi}{2}-1,\ \frac{\pi}{8}\right)$ である．

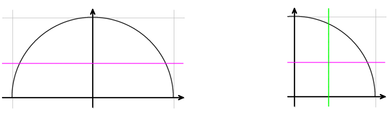
V_y は，逆三角関数を使えない生徒のことを考えれば，バームクーヘン型の積分を行って，$V_y=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx=\pi(\pi-2)$ とするのが良いかも知れない．

■　下に「型紙」を載せる．お試しあれ．

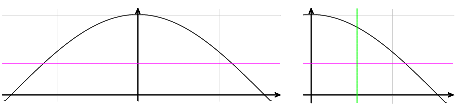
放物線



半円，四分円



余弦



2014 年 3 月 11 日