

雑感 「奇妙な部分」が手がかかり

■ 2014年4月25日の朝日新聞朝刊。(いま子どもたちは) 数学にかける青春:3に「一番嫌いなのは、答えを見ること」と題する記事があった。その一部を転載すると次のようである。

難問を解く数学的なひらめきは、どこから来るのか。国際数学オリンピック(IMO)日本代表に決まった筑波大付属駒場高校(東京都世田谷区)3年の大場亮俊君(17)の場合、2通りあるという。

一つは、これまでに類似問題を解いた知識が役立つケース。受験のように、勉強量に裏打ちされた方法だ。

もう一つは「問題の本質は何か」を考えるやり方だ。数学の中でも幾何学が好きで得意な大場君は、図形を見ると「奇妙な」部分が浮かんでくる。それを突破口にして、本質を探っていくという。

■ この「図形を見ると『奇妙な』部分が浮かんでくる。それを突破口にして、本質を探っていく」という部分は、示唆に富んでいる。

■ この記事を読む少し前に解いた、2014年のセンター試験の追・再試験 IIB のベクトルの問題の最初の部分。

第4問 (選択問題) (配点 20)

平面上に、1辺の長さが1の正方形ABCDと、その外側に三角形OABがあり、 $OA = OB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ とする。 $0 < t < 1$ とし、線分OA, AD, CBを $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれP, Q, Rとする。以下では、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \boxed{\text{ア}}$ により、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また、 $\vec{a} + \vec{b}$ と \vec{AD}

は平行であり、 $|\vec{a} + \vec{b}| = \boxed{\text{エ}}$ により、 $\vec{AD} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(\vec{a} + \vec{b})$ である。

次に、 \vec{PQ} , \vec{PR} を t と \vec{a} , \vec{b} を用いて表すと

$$\vec{PQ} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} - t \vec{a} + \frac{t}{\boxed{\text{ク}}} \vec{b} \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

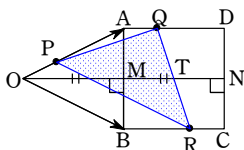
$$\vec{PR} = \frac{1 - \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}} t \vec{a} + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ク}}} - t \vec{b} \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

図がかかれていないので、そこから始めることになるが、正方形の1辺の長さに対して、 $\triangle OAB$ のOA, OBの長さ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ という値が、それこそ「奇妙」である。なぜ、この値なのか。

実はこの問題、右図のように、OからABに垂線OMを引いたとき、 $OM=1$ になるように設定されている。したがって、図で、 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{ON}$ になっていて、それに気づくことが最初の大きなポイントになっている。



■ この問題は、さらに $\triangle PQR$ の面積Sの最小値を求める設問へ続き、 $S = \triangle PQT + \triangle PRT$ という誘導がなされるが、この誘導はイジワルで、計算が煩雑である。

この奇妙な設定から、 $\vec{a} = (1, \frac{1}{2})$, $\vec{b} = (1, -\frac{1}{2})$ という簡易な成分設定ができるので、 $\vec{PQ} = (1, \frac{1-t}{2})$, $\vec{PR} = (2(1-t), -\frac{1+t}{2})$ から $S = \frac{1}{2} \left\{ (1-t)^2 + \frac{1+t}{2} \right\} = \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{4} t + \frac{3}{4}$ とするのが簡便である。

■ 「奇妙な部分」に気づくセンスを身につけたい。