雑感　階差数列

階差数列において，注意したい 2 つの事柄について触れる．

■　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき次の公式がある．

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$　…　①

この $n \geqq 2$ という条件ははずせないが，具体的な数列で階差数列を求めてこの公式を用いて a_n を計算したとき，その a_n の式が $n=1$ の場合に成り立たないことはまれである．b_n が n の多項式や指数表示された式，分数式などでこの $\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ が計算できるような場合，$\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ に $n=1$ を代入すると必ず 0 になる．

では，$n=1$ の場合に①の式が成り立たないような数列 $\{a_n\}$ は存在するのかという疑問がある．

このことについての考察が次にある．テキストや画像でなく，YouTube の動画なので注意が必要だが，念入りな考察がしてあって役に立つ．

◎階差数列の整合性

http://www.youtube.com/watch?v=nSgesd7OsfI&list=UUl-tnq7Oei1O5q9T28sczTQ&index=7

◎階差数列の公式の整合性について（続報）

http://www.youtube.com/watch?v=KbRb3CmcQo4&list=UUl-tnq7Oei1O5q9T28sczTQ

なお，（続報）の【蛇足】において，　（有限）数列 $\{a_n\}$: 0, 3, 4, 5, 6　の一般項 $f(n)$ を求めるに当たって，

$f(n) = (n-1)(an^3 + bn^2 + cn + d)$ とおき，$f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=5$, $f(5)=6$ から連立方程式を解き，a, b, c, d を求めているが，ここは次のようにするのが簡明である．

$2 \leqq n \leqq 5$ において，$f(n) = n+1$ なので，

$f(n) = n+1+p(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$　とおく．

$f(1) = 24p+2 = 0$ だから，$p = -\dfrac{1}{12}$ より

$f(n) = n+1-\dfrac{1}{12}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ である．整とんすればこれは【蛇足】の式に等しいことがわかる．なお，「考察」にもあるとおり，$(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ は $4! = 24$ の倍数であるから，$f(n)$ はすべての自然数 n について整数である．

■　階差数列は「推定」である．与えられているより先の項についても，推定した規則で階差数列ができているのだろうという想定で計算をすることになる．したがって，もしかするとその推定が間違いであるかも知れないという心配が残る．もちろん，試験では与えられた数列の部分について成り立つ式であれば正解とするから，杞憂と言うべきかも知れないが….

例えば，$\{a_n\}: 1, 3, 7, 13, 21, \cdots\cdots$ について階差数列を 2, 4, 6, 8, …から $\{2n\}$ であると推定するのが一般的だろうが，もしかすると 8 の次は 10 でないかも知れない．

生徒には，階差数列とはそういうものだという「話」をするが，そのときには，教科書の例題の答えの式と違う一般項の式を作って，こうかも知れない一般項をみせる必要がある．

そのときに使える手法が上掲の方法である．

上の $\{a_n\}$ について，$a_n = n^2 - n + 1$ が求まっているとき，

$f(n) = n^2 - n + 1 + p(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$　は $1 \leqq n \leqq 5$ では $f(n) = a_n$ である．$a_6 = 31$ と想定された問題だが，$p=1$ とすれば $f(6) = 151$ で 31 とは異なる値であって，

1, 3, 7, 13, 21, 151, 763, …という数列が得られ，$p = -\dfrac{31}{120}$ とでもすれば，$f(6) = 0$ で，1, 3, 7, 13, 21, 0, −35, …という数列が得られるのである．

2013 年 4 月 16 日