雑感　階比数列と 2 項係数

■　拙著『問題作りの道具箱』の中で，「階比数列」を提案した．

> **コラム 2　二項係数と“階比数列”**
>
> 二項定理で登場するパスカルの三角形には，様々な興味深い性質が含まれていることはよく知られているが，授業場面でその多くの性質に触れる余裕はない．
>
> $(2x-3y)^7$ などの展開式を作る場合などには，すべての項の係数が必要となるから，二項係数を 1 つずつ計算するよりもパスカルの三角形を利用する方が便利であり，そのように指導する．そして，「パスカルの三角形のある段だけを突然作ることはできないから，1 段目から順に必要な段まで作るんだよ」などと指導してきた．恥を忍んで言えば，そう思い込んでいた．
>
> しかし，パスカルの三角形の性質によれば，いきなりある段を作ることが可能であり，しかもルールは美しい．例えば，第 7 段目は次のようになっている．
>
> $$1 \xrightarrow{\times\frac{7}{1}} 7 \xrightarrow{\times\frac{6}{2}} 21 \xrightarrow{\times\frac{5}{3}} 35 \xrightarrow{\times\frac{4}{4}} 35 \xrightarrow{\times\frac{3}{5}} 21 \xrightarrow{\times\frac{2}{6}} 7 \xrightarrow{\times\frac{1}{7}} 1$$
>
> 階差数列ならぬ“階比数列”の一般項が $\dfrac{7-r}{r+1}$ （$r=0,\ 1,\ \cdots,\ 7$）であり，二項係数の割り算から直ちに分かることである．不明を恥じることが多い．

■　2015 年の東京大学・理系の問題．

> m を 2015 以下の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

■　解法はいろいろあり得るが，上のコラムの方法が使えそうであると思われるので，その方向で進めてみる．

パスカルの三角形の 2015 段目の数列は，有限数列 $\{{}_{2015}\mathrm{C}_n\}$（$0 \leqq n \leqq 2015$）をなし，その階比数列は（$n=0$ スタートなので，分母は ${}_{2015}\mathrm{C}_{k-1}$ であることに注意すると）

$$\frac{{}_{2015}\mathrm{C}_k}{{}_{2015}\mathrm{C}_{k-1}} = \frac{2015!}{k!(2015-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(2015-k+1)!}{2015!} = \frac{2016-k}{k}$$

から，$\left\{\dfrac{2016-k}{k}\right\}$ （$k \geqq 1$）である．

有限数列 $\{{}_{2015}\mathrm{C}_n\}$ の初項は 1 で奇数であるから，$\dfrac{2016-k}{k}$ が偶数となる最小の k が求める m になる．

$\dfrac{2016-k}{k} = 2\ell$ （ℓ は整数）とおくと，$2016-k = 2k\ell$．

よって，$2016 = k(2\ell+1)$ で，これを満たす最大の $2\ell+1$（奇数）が $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ より $2\ell+1 = 3^2 \cdot 7$ であるから，最小の $k = 2^5$ である．したがって，求める $m = 2^5 = 32$．

■　答はこれで合っているが，解答の流れに問題はないか？

数列の最初を具体的に書いてみれば，

$$1 \xrightarrow{\times\frac{2015}{1}} 2015 \xrightarrow{\times\frac{2014}{2}=107} \text{奇数} \xrightarrow{\times\frac{2013}{3}=671} \text{奇数}$$
$$\xrightarrow{\times\frac{2012}{4}=503} \text{奇数} \xrightarrow{\times\frac{2011}{5}} \text{奇数} \longrightarrow \cdots$$

ということである．

う～む．この有限数列の項はすべて整数だが，階比は整数とは限らない．上の例でも分かるように，$\times 2011/5$ のような場合があるから，例えば，$\times\dfrac{\text{偶数}}{\text{奇数}}$ のような場合，$\dfrac{2016-k}{k}$ が偶数でなくとも，この有限数列の項が偶数になるのである．

したがって，上の　　部分は論理的に間違いである．

■　とは言え，$2016-k$ と k の偶奇は一致するから，考えるべきは，$\times\dfrac{\text{偶数}}{\text{偶数}}$ の場合で，この値が「分子の 2 の因数の数＞分母の 2 の因数の数」となる最初の場合が求める場合となる．

k が偶数で，最小の場合であることから，$k = 2^p$ $(p \geqq 1)$ の場合を考えれば十分で，このとき，$\dfrac{2016-k}{k} = \dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 - 2^p}{2^p}$ であるから，「分子の 2 の因数の数＞分母の 2 の因数の数」となる最小の p は 5 である（5 未満の場合は，約分すると奇数になる）．

このとき，この階比の値は 2^5 で約分でき，その値は整数であり偶数になっているから，　　部分は結果的に正しいことになる．

2015 年 8 月 1 日