雑感　常　用　対　数

■　2 年生の数学Ⅱの「指数関数・対数関数」で，常用対数を指導する．「常用対数」は「常用する対数」からの命名だろうが，現在となっては「かつて常用した対数」になってしまっていて，指導の観点も曖昧である．せいぜい，2^{100} などの値の桁数計算くらいに限られているのが実態だ．

　でも，コンピュータや手軽な電卓がなかった昔（といっても 40 年前はその時代だが…）には，十分に「常用する対数」であった．工学部などの学生は，小脇に（丸善の？）『常用対数表』を抱えて歩いていたはずだ．

■　どのような利用があったのかを，今の高校生に懇切丁寧に話す時間的な余裕はないが，乗除計算や累乗根の計算の仕組みを指導してみた．

　とりわけ，$\sqrt[3]{2}$ の値の近似値計算は，生徒も驚く．

$$\log_{10}\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}\log_{10}2 \fallingdotseq \frac{1}{3}\times 0.3010 \fallingdotseq 0.1003 \fallingdotseq \log_{10}1.26$$

から　$\sqrt[3]{2}\fallingdotseq 1.26$　である．

　実際に 1.26^3 を生徒に計算させると，値が 2.000376 となってその精度の良さに驚く．

　通常の電卓のみでこの近似値計算を行う方法もあるらしいがそう簡単ではない（下記の URL 参照）．
http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/urawaza/root.htm

■　そもそも，「かけ算を足し算で処理できる」という発想は，三角関数の積和公式にあるといわれる．

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

を用いて 0.837×0.316 を計算してみた．三角関数表は教科書の巻末にある 1 度刻み，小数第 4 位までのものを用いた．

$$0.837\times 0.316$$

$$\xrightarrow{\text{表を逆に引いて}} \fallingdotseq \sin 57^\circ\times\cos 72^\circ$$

(ここの精度が荒く$\sin 57^\circ=0.8387,\ \cos 72^\circ=0.3090$)

$$=\frac{1}{2}\{\sin(57^\circ+72^\circ)+\sin(57^\circ-72^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 129^\circ-\sin 15^\circ)=\frac{1}{2}(\cos 39^\circ-\sin 15^\circ)$$

$$\xrightarrow{\text{表を引いて}} \fallingdotseq \frac{1}{2}(0.7771-0.2588)$$

$$=0.25915$$

正しくは　$0.837\times 0.316=0.264492$
であって，誤差が大きい．

　もちろん，角度が 2 桁だから有効数字が 2 桁だと考えれば $0.25915\fallingdotseq 0.26$ であり，$0.264492\fallingdotseq 0.26$　で正しい値だと言えなくもない．

■　計算の精度を上げるためには，角度まで含めて桁数の大きい三角関数表が必要なはずである．
　http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic1/basic1.html#logarithm
によれば，「当時（15～17 世紀頃）天文学者らは 10 桁や 12 桁位 (!) の三角関数表を持っていたよう」だという．

　試みに，上の方法での計算を数式処理ソフトを用い 10 桁程度の精度で計算してみると，結果は 0.2644931944となり，それなりの精度で計算できそうだ．