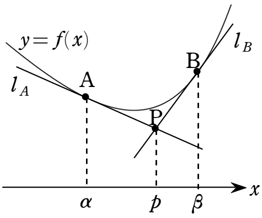
雑感　自明な命題か（続）

■　証明した以下の命題を，「補助定理」とする．

関数 $f(x)$ が， $f''(x)>0$ を満たすとする．2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$　$(\alpha<\beta)$ における $y=f(x)$ の接線をそれぞれ $l_A,\ l_B$ とする． $l_A,\ l_B$ の交点 P の x 座標を p とするとき，$\alpha<p<\beta$ が成り立つ．



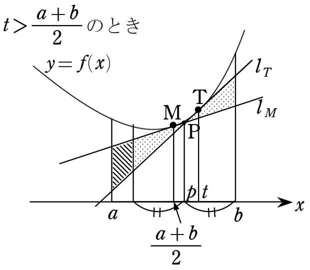
■　次の定理の証明に入る．雑誌『大学への数学』(『解法の探求Ⅱ』などを参照）において「はみ出し削り論法」と呼ばれている方法による．

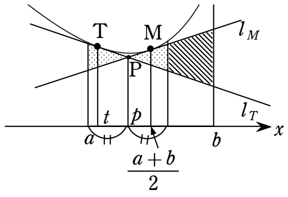
【定理】　関数 $f(x)$ が，区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f''(x)>0$ を満たすとし， $C:y=f(x)$ とする． $a\leqq t\leqq b$ を満たす t に対して，点 $\mathrm{T}(t,\ f(t))$ における接線を l_T とし，曲線 C と接線 l_T，および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲む図形の面積を $S(t)$ とする．このとき，

$S(t)$ は $t=\dfrac{a+b}{2}$ のとき最小値をとる．

＜証明＞　点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$ を C 上にとり，点 M における C の接線を l_M とする．

(i)　$t>\dfrac{a+b}{2}$ のとき，補助定理によって， l_T と l_M の交点 P の x 座標 p は， $\dfrac{a+b}{2}<p<t$ を満たし，右上図から $S(t)$ は $S\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ と比べて，斜線部分だけ大きく（網目部分は面積が等しい）， $S(t)>S\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ である．





(ii)　$t<\dfrac{a+b}{2}$ のときも同様である．

(i)，(ii) により， $S(t)$ の最小値は $S\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ である．（終）

■「補助定理」を自明とすれば，計算は何も必要なく，図から明らかな命題であった．

■　実は，次の命題も，同様な「はみ出し削り論法」から明らかである．（拙著　『関数のカタログ』pp.59 参照）

単調増加関数 $f(x)$ と， $p<a<q$ を満たす定数 $p,\ q$ に対して，

$S(a)=\displaystyle\int_p^q |f(x)-f(a)|dx$ は $a=\dfrac{p+q}{2}$ で最小となる．

＜証明＞　$S(a)$ は図の緑斜線部分の面積の和．

$S\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ は図の青斜線部分の面積の和．

緑の面積が大きく，

$S\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\leqq S(a)$ で，

$S\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ が最小．（終）