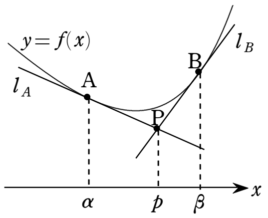
雑感　自明な命題か

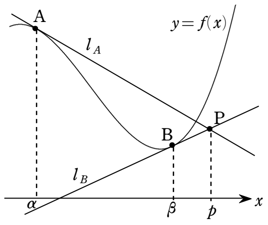
■　関数に関するある命題を考えていて，次の命題が自明なのかどうか気になった．

> 関数 $f(x)$ が，$f''(x)>0$ を満たすとする．2 点 $A(\alpha,\ f(\alpha))$，$B(\beta,\ f(\beta))$　$(\alpha<\beta)$ における $y=f(x)$ の接線をそれぞれ l_A, l_B とする．l_A, l_B の交点 P の x 座標を p とするとき，$\alpha<p<\beta$ が成り立つ．



条件的には，$f''(x)>0$ のみであり，グラフが下に凸ということでしかない．反例を探そうとしても見つからない．グラフ的には当たり前の事実である．

もちろん，$f''(x)<0$ でも成り立ち，凹凸が入れ替わらないということが条件であり，右の図のように凹凸が入れ替わるような場合，上の命題は成り立たない（ことがある）．



■　何人かの先生に，何気に聞いてみる．「これって明らかなんですかねぇ？」

「う～ん，明らかそうですけどねぇ」との返事．

■　証明を考えてみたが，自明そうにみえる命題の証明は，意外と手強く，1 行や 2 行では終わらない．

＜証明＞　l_A, l_B の方程式はそれぞれ

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$，$y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$ である．

これらを連立して解いた x の値が p であるから

$\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}p=\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)-\{f(\beta)-f(\alpha)\}$

$=\beta\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}+(\beta-\alpha)f'(\alpha)-\{f(\beta)-f(\alpha)\}$ となる．

ここで，$f''(x)>0$ から $f'(x)$ は単調増加で，$\alpha<\beta$ より $f'(\alpha)<f'(\beta)$ であって，$f'(\beta)-f'(\alpha)\neq 0$ より

$p=\beta-\dfrac{\{f(\beta)-f(\alpha)\}-(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)}$ となる．

ここで，平均値の定理により $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(c)$ となる c が，$\alpha<c<\beta$ に存在し，

$p=\beta-\dfrac{(\beta-\alpha)\{f'(c)-f'(\alpha)\}}{f'(\beta)-f'(\alpha)}$ である．$f'(x)$ が単調増加であることから，$f'(\alpha)<f'(c)<f'(\beta)$ を満たす．

したがって，$0<\dfrac{f'(c)-f'(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)}<1$ であるから，$\alpha<p<\beta$ である．（終）

■　実は，この命題を，次の定理の証明に用いようという魂胆である．

> 【定理】　関数 $f(x)$ が，区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f''(x)>0$ を満たすとし，$C: y=f(x)$ とする．$a\leqq t\leqq b$ を満たす t に対して，点 $T(t,\ f(t))$ における接線を l_T とし，曲線 C と接線 l_T，および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲む図形の面積を $S(t)$ とする．このとき，$S(t)$ は $t=\dfrac{a+b}{2}$ のとき最小値をとる．

■　この項続く．