雑感　最も美しい二等辺三角形(?)

■　二等辺三角形に関する興味深い問題が，今春の大学入試問題にある．

> AB＝AC＝1 である二等辺三角形 ABC において，BC＝$2x$，内接円の半径を r とおく．
> (1)　r を x を用いて表せ．
> (2)　r が最大となる x の値を求めよ（最大値そのものは求める必要はない）．　〔2014　琉球大〕

■　私的には，極めて懐かしい問題である．

というのも，昔，同意の問題を作って（オリジナルである）校内の実力考査に出題したことがあるからで，手元のメモに依れば 1982 年 11 月のことである．

> 頂角 2θ，AB＝AC＝1 の二等辺三角形 ABC の内接円の半径を r とする．
> (1)　r を求めよ．
> (2)　r を最大とする θ の値を α とするとき，$\sin\alpha$ の値を求めよ．
> (3)　内接円の面積の最大値を求めよ．　〔1982　某高実考〕

しかも，同意の問題がこの後，1987 年に（近隣の）岐阜大学で出題されているのだ．

> (1)　AB＝AC＝1, ∠A＝2θ である三角形 ABC の内接円の半径 r を θ で表せ．
> (2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，r を最大にする θ の値を α とする．$\sin\alpha$ の値を求めよ．　〔1987　岐阜大〕

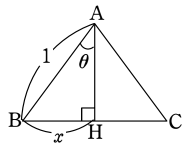
■　変数をどう設定するかでアプローチが異なるが，底辺を $2x$ と置く最初の問題では，$r=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{x+1}$ $(0<x<1)$ であり，

$\dfrac{dr}{dx}=-\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$ で，　$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で r が最大となる．

また，頂角を 2θ と置く場合，$r=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$ であり，

$\dfrac{dr}{d\theta}=-\dfrac{\sin^2\theta+\sin\theta-1}{1+\sin\theta}$ で，　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

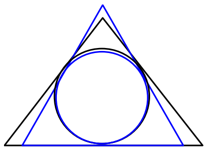
で r が最大となる．



図から，$x=\sin\theta$ であるから，2 つの結果の関係は当然である．

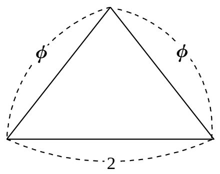
■　この問題を考えたとき，「当然，正三角形のとき最大だろうな」と予想し，計算したらそうでなかったので，何回も計算を見直した記憶がある．この問題を解いた生徒も，「正三角形だと思って解いたら違っていて，驚いた」と感想を述べていた．

ちなみに r の最大値は $\sqrt{\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}}\fallingdotseq 0.30028\cdots$ であり，正三角形の場合 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\fallingdotseq 0.28867\cdots$ であるから，結構な差がある．右図は等辺を等しくして 2 つの図を重ねたもので，r が最大となるものが黒線，正三角形が青線である．



また，r が最大のときの頂角は約 76.35° である．

■　$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ は黄金比 $\phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ の逆数であるから，内接円の半径が最大となるとき，等辺：底辺＝ϕ：2 である．黄金比が最も美しい比であると言われるが，それに倣えばこの比の二等辺三角形が最も美しい二等辺三角形であると言えるのだろうか．確かに，安定感を感じる二等辺三角形ではあるのだが…．



2014 年 7 月 1 日