

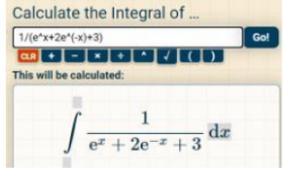
■ 積分を専門に行ってくれるサイト、その名もまさしく **Integral Calculator** なるサイトがある。
<https://www.integral-calculator.com/>

しかも、with steps であるから、途中も示してくれるみたいだ。

■ 実際に使ってみよう。右のような画面に入力。定積分は、グレイの枠に上・下端を入力する。まず、置換積分・部分分数分解を伴うものから。



Integral Calculator
 Calculate integrals online – with steps and graphing!



Problem:

$$\int \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx$$

Put terms over a common denominator:

$$= \int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$$

Substitute $u = e^x \rightarrow \frac{du}{dx} = e^x$ (steps) $\rightarrow dx = e^{-x} du$, use:

$$e^{2x} = u^2$$

$$= \int \frac{1}{u^2 + 3u + 2} du$$

Factor the denominator:

$$= \int \frac{1}{(u+1)(u+2)} du$$

Perform partial fraction decomposition:

$$= \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2} \right) du$$

Apply linearity:

$$= \int \frac{1}{u+1} du - \int \frac{1}{u+2} du$$

Now solving:

$$\int \frac{1}{u+1} du$$

Substitute $v = u + 1 \rightarrow \frac{dv}{du} = 1$ (steps) $\rightarrow du = dv$.

$$= \int \frac{1}{v} dv$$

This is a standard integral:

$$= \ln(v)$$

Undo substitution $v = u + 1$:

$$= \ln(u + 1)$$

Now solving:

$$\int \frac{1}{u+2} du$$

Substitute $v = u + 2 \rightarrow \frac{dv}{du} = 1$ (steps) $\rightarrow du = dv$:

$$= \int \frac{1}{v} dv$$

Use previous result:

$$= \ln(v)$$

Undo substitution $v = u + 2$:

$$= \ln(u + 2)$$

Plug in solved integrals:

$$\int \frac{1}{u+1} du - \int \frac{1}{u+2} du$$

$$= \ln(u+1) - \ln(u+2)$$

Undo substitution $u = e^x$:

$$= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 2)$$

The problem is solved:

$$\int \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 2) + C$$

後半の段階ではここまで容易な置換積分を示す必要もないが、融通の利かないコンピュータのなせる業か。

■ 次に、部分積分関連。

Problem:

$$\int x^3 \ln(x) dx$$

Integrate by parts: $\int x'g' = fg - \int f'g$

$f = \ln(x)$, $g' = x^3$
 ↓ steps ↓ steps
 $f' = \frac{1}{x}$, $g = \frac{x^4}{4}$

$$= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx$$

Now solving:

$$\int \frac{x^3}{4} dx$$

Apply linearity:

$$= \frac{1}{4} \int x^3 dx$$

Now solving:

$$\int x^3 dx$$

Apply power rule:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ with } n = 3:$$

$$= \frac{x^4}{4}$$

Plug in solved integrals:

$$\frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{16}$$

Plug in solved integrals:

$$\frac{x^4 \ln(x)}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx$$

$$= \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16}$$

The problem is solved:

$$\int x^3 \ln(x) dx = \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

Rewrite/simplify:

$$= \frac{x^4 (4 \ln(x) - 1)}{16} + C$$

使うべき公式まで丁寧に示してくれ、痒くないところまで手が届く。

■ $\sqrt{4-x^2}$ などは、逆三角関数の置換が行われる。

$e^x \sin x$ は部分積分を 2 回行い、「The integral $\int e^x \sin(x) dx$ appears again on the right side of the equation」とする定番の方法である。

結果が初等関数表示できないものについては、例えば右のように、特殊関数を用いた表示がされる。

Problem:

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

This is a special integral (exponential integral):

$$= \text{Ei}(x)$$

The problem is solved:

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \text{Ei}(x) + C$$

■ 昨年の東大の問題。定積分だが、途中計算は不定積分だけが示される。左のような入力で、右のような出力である(定積分値は別に表示される)。

Calculate the Integral of ...

$$\int_0^1 (x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

MANUALLY COMPUTED ANTIDERIVATIVE:

$$\int f(x) dx = F^*(x) =$$

"Manual" integration with steps:
 The calculator finds an antiderivative in a comprehensible way. Note that due to some only be valid for parts of the function.

$$\frac{\arctan(x)}{2} + 2\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{x^3}{3} + C$$

Show steps

Show steps を見てみると、被積分関数を展開して 4 つの積分に分け、それぞれの積分を 1 つずつ行っている。ぜひ、Steps を確かめて見られたい。

■ このサイトの "How the Integral Calculator Works" に書かれているが、ここでは Maxima を使って積分計算を行っている。普通に Maxima を使っても結果のみしか表示されないが、途中段階が見えて困ったときには有り難い。

■ 積分があれば当然、微分計算サイトもある。 <https://www.derivative-calculator.net/#> このサイトで、 $y = x^x$ をどのように微分しているか見るのもよからう。