雑感　整数問題がぞろぞろ（続）

■　2016 年国公立の前期試験で，整数問題の出題が多いことを指摘したが，さらにぞろぞろ見つかった．一部を紹介したい．

■　東北大の $\boxed{2}$ は次の通り．

(1)　6 以上の自然数 n に対して不等式　$2^n > n^2 + 7$　が成り立つことを数学的帰納法により示せ．

(2)　等式　$p^q = q^p + 7$　を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

(2)は京大の問題に似ているが，$p,\ q$ の奇偶を考え，(1)の結果を利用すれば絞り込みができる．

■　東京工大の $\boxed{4}$ は次の通り．

n を 2 以上の自然数とする．

(1)　n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ．

(2)　n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ．

(1)はエラトステネスの篩の感覚で言えば，n が素数であれば，$2 \sim n-1$ までのすべての数で n は割り切れていない．(2)も素数でない n を $n = pq\ (2 \leqq p \leqq q \leqq n-1)$ としたとき，$p < q\ (p \neq q)$ ならば，同じく篩の感覚で明らか．問題は $p = q$ の場合になる．

階乗は，岡山大でも出題されている．

■　岡山大 $\boxed{1}$ は次の通り．

p は素数とする．正の整数 n に対し，p^d が n の約数となる整数 $d\,(d \geqq 0)$ のなかで最大のものを $f(n)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$p = 3,\ n = 3^2!$ のとき，$f(n)$ の値を求めよ．

(2)　$p = 5,\ n = 5^2!$ のとき，$f(n)$ の値を求めよ．

(3)　m が正の整数で，$n = p^m!$ のとき，$f(n)$ を求めよ．

(3)は $f(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} p^k$ だが，(2)は(1)と本質的に変わらず，意図不明．

(3)への誘導とするなら，$n = 5^3!$ などにすべきだったのではないか．

■　九州大〔4〕は次の通り．

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく．a_n は 0 から 12 までの整数である．以下の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ．

(2)　$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ を求めよ．

(3)　以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ．

(i)　N を十進法で表示したとき 6 桁となる．

(ii)　N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる．

(iii)　N は 13 で割り切れる．

(1)は合同式感覚では自明である．$\{a_n\}$ は，$10, 9, 12, 3, 4, 1$ を周期として繰り返す数列になる．(3)は $N = a \cdot 10^5 + 20160 + b$ と表示できて，mod13 で，$N \equiv 4a + 10 + b$ となり，ここから範囲を狭める．

■　金沢大 $\boxed{3}$ は，次の通り．

(1)　方程式 $25x + 9y = 1$ の整数解をすべて求めよ．

(2)　方程式 $25x + 9y = 33$ の整数解をすべて求めよ．さらに，これらの整数解のうち，$|x + y|$ の値が最小となるものを求めよ．

(3)　2 つの方程式 $25x + 9y = 33,\ xy = -570$ を同時に満たす整数解をすべて求めよ．

センター試験の問題かと思うような問題．

■　数学 A で「整数」は選択であって必須ではない．仮に「整数」を履修していなくても，範囲外と言えなくもない問題として，整数問題は位置づけられるのだろうか．

これだけ出題が一般的になると「整数」の丁寧な指導が欠かせないことになる．

2016 年 3 月 15 日