雑感　整数問題がぞろぞろ

■　2016 年の国公立大の前期試験が終わり，予備校などが問題を Web 上に載せている．

いろいろ見ていると，整数問題が例年になく目につくのは，「数学 A」に整数問題が入ったためなのだろうか．これまでも整数問題は出題されてきてはいるが，ユークリッドの互除法や合同式などもお墨付きをもらった今，今後もっと出題が増えていくのだろうか．具体的な問題をいくつか見ていきたい．

■　まずは京都大学 $\boxed{2}$．問題文も簡潔で京大らしい．

素数 $p,\ q$ を用いて　p^q+q^p　と表せる素数をすべて求めよ．

「p，q の偶奇を考えると，一方が偶数，他方が奇数の場合に限られることが分かり，偶素数は 2 のみで，式の対称性から，$p=2,\ q$ を奇素数として一般性を失わない．$N=p^q+q^p$ とすると，$q=3$ のとき $N=17$ で，これは素数である」と，ここまではよかろう．この後どうするかがポイントである．

（$q=5$ のとき $N=57$，$q=7$ のとき $N=177$ となり，いずれも 3 の倍数になることから考えて）$q \geqq 5$ のとき，3 を法とする合同式で考えると，このとき $N \geqq 57$ であって

$$N=p^q+q^p=2^q+q^2 \equiv (-1)^q+q^2=q^2-1=(q+1)(q-1)$$

となり，q が 3 の倍数でない場合は $N \equiv 0$ となって N は 3 の倍数となる．3 の倍数の素数は 3 のみで，$N \geqq 57$ から N は素数にならない．q は 5 以上の素数であるから，q が 3 の倍数となることもない．したがって，$2^3+3^2=17$ が求めるものである．

■　東大の次の問題（第 5 問）はどうだろう．

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p < 0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}\,]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

「長文」だが，$0.a_1a_2\cdots a_k$ は小数第 k 位の有限小数であるから，単に有理数でしかない．ただ，(1)，(2)が(3)に使えるわけではないという，ちぐはぐな設定．(3)は正の整数 n に対して，「$\sqrt{n}$ が有理数となるときは，$\sqrt{n}$ は整数以外ありえない」という（感覚的には当たり前な）事実の証明である．したがって，有理数 $\sqrt{s}$ を $\dfrac{m}{n}$ と置いて，$n=1$ を示せばよいだけである．

整数問題と言うことではないのかも知れない．

■　神戸大では，約数，公約数，最大公約数に関する出題（５.）があり，$a=pb+c$ のとき，a と b の最大公約数と b と c の最大公約数が等しいことの証明をさせている．ユークリッドの互除法の利用か．これを，隣接 3 項間の漸化式によって定まる自然数列の項の最大公約数を求める問題(2)へと繋げている．

■　広島大〔５〕は，数列 $x_n=2^n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ の各項の下 1 桁が，1，2，4，8，6，2，4，8，6，…となっていて，2 から先，循環節の長さが 4 の循環数列ができることを問題にしている．

興味深いが，これも整数に関する問題であろう．

2016 年 3 月 1 日