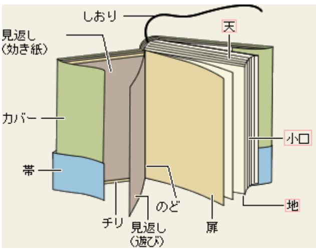
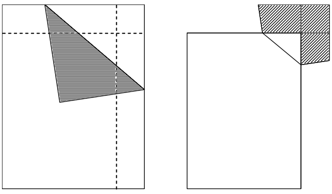
雑感　福紙（福の紙）

■　書籍や雑誌などは，化粧断ちといって，製本された本の天地や小口を裁断する（右図は，第一印刷の HP から寸借し，加工した）．



■　最近では余り遭遇しないが，昔はページが折れ曲がったまま化粧断ちされてしまい，イカのエンペラのような部分が残っていることがあった．

図のように折れ曲がった紙が点線で裁断され，残った部分を広げると右図のようになる仕組みだ．



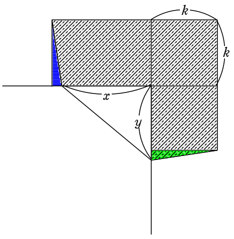
■　この残っている部分にはちゃんと名前がついていて，「福紙(福の紙)」と呼ぶ．その語源はおよそ次のようである．

陰暦 10 月は八百万の神様が出雲の国に集まるため，神無月である．一方，出雲の国では陰暦 10 月を神在月とよぶことは人口に膾炙しているが，出雲の国に出かけず居残っている神がいて，それが福の神（恵比寿様）であるという．

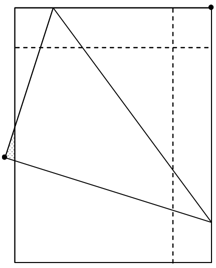
上のように裁断されずに「残っている紙」を「居残りの神」と洒落て，「福紙（福の紙）」と言うのだという．

■　生徒にこの話をすると，「また，先生の親父ギャグだろ」と言われてしまうのだが,「広辞苑にも載っている話だ」というと，やっと納得してくれる．

■　さて，この福紙の面積はどれだけだろうか．右のような長さ x，y と裁断する巾が k であるとき，左上の青の部分（福紙に含まれない部分）と緑の部分（福紙に含まれる部分）が合同な直角三角形なので（図をきちんと描けば容易に分かる），福紙の面積は $k(x+y+k)$ である．

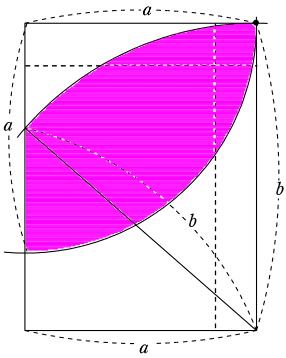


■　横，縦の長さがそれぞれ a，b $(a<b)$ の数枚の紙を重ねて左側を綴じ，天と小口を k だけ化粧断ちするとき，こういった福紙が生まれる場合を考えてみよう．紙が折れ曲がらなければならないが，単純に 1 回だけ紙の右上が折れ曲がった場合で考えることにする．



右のような折れ曲がり方だと，紙を重ねたとき折れ曲がった一部がはみ出してしまうので，折れ曲がりに気づく．

したがって，そういう場合を除外すると，右上の点（・）が折れ曲がって右の図のピンクの部分にあることが，福紙が生まれるために必要である．境界の曲線はすべて円弧である．

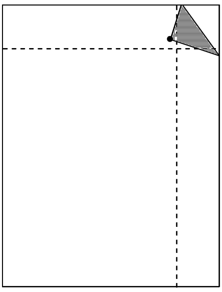


■　ところが，折れ曲がったにもかかわらず，福紙が生まれない場合がある．これは，折れ曲がりが少なく，折れ曲がりで重なった部分の全体が裁ち落とされる次のページの図のような場合である．

そうすると，このような場合を除外しなければならないが，

2012 年 11 月 24 日

このような場合の右上の点（・）が折れ曲がって存在する領域はどこだろうか？



■　これは難しそうだ．

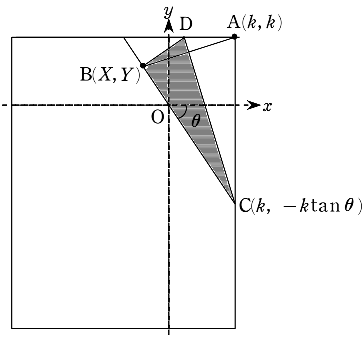
図のように，x 軸，y 軸で化粧断ちすることにする．紙が折れ曲がって，右上の点 A$(k,\ k)$ が点 B$(X,\ Y)$ に重なるとする．

図のように$\angle xOC=\theta$ とすると，点 C の座標は $(k,\ -k\tan\theta)$ である．

また，$\angle ACD=\angle BCD$
$=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$ であるから，直線 DC の方程式は

$y=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)(x-k)-k\tan\theta$

となる．



ここで，$\tan\dfrac{\theta}{2}=m$ とすると

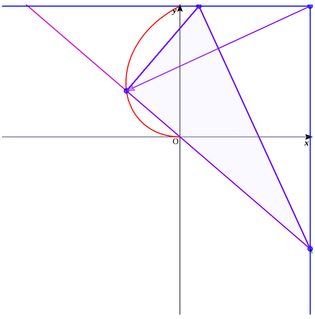
$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $0\leqq\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より $0\leqq m<1$ で，

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1+m}{1-m}\ ,\quad \tan\theta=\frac{2m}{1-m^2}\ .$$

よって，DC の方程式は　$y=\dfrac{m+1}{m-1}x-\dfrac{k(m^2+1)}{(m-1)(m+1)}$ である．

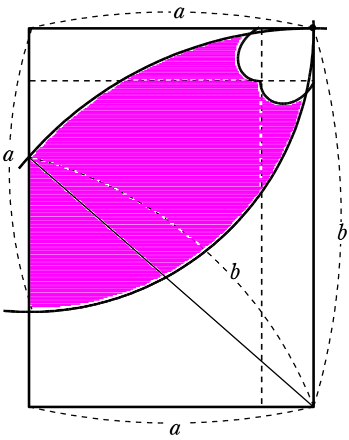
点 B は直線 DC に関する点 A の対称点であるから，点 B の座標を求めると B$\left(\dfrac{2km(m-1)}{m^2+1},\ \dfrac{4km^2}{(m+1)(m^2+1)}\right)$ となる．

■　m をパラメータとし，$0\leqq m<1$ の範囲で m を動かすとき，点 B の軌跡は右図の赤線である．



紙の右上の点（・）が折れ曲がって，この曲線の右側の領域に存在する場合は，福紙は生まれない．

点 C が直線 $y=k$ 上にある場合も含めて，結局，次の図のピンクの領域に，紙の右上の点（・）が折れ曲がった場合に，福紙が生まれることになる．



■　折しも本日は神無月十日余り一日．相応しい話題である．

（「福紙」が一般的な呼び方らしいので，タイトルなどを変更した）

2012 年 11 月 24 日