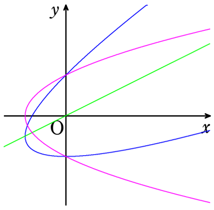
雑感　傾いた放物線の軸

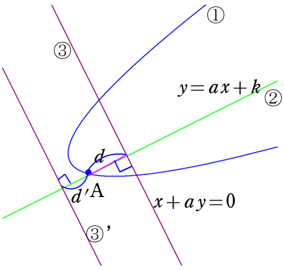
■　方程式 $y=ax\pm\sqrt{x+b}$ （$a\neq 0,\ b\neq 0$）が表す図形は，直線 $y=ax$ と放物線 $y=\pm\sqrt{x+b}$ を合成した図形で，傾いた放物線を表す．

たとえば，グリーンの直線が $y=\dfrac{1}{2}x$ で，$y=\dfrac{1}{2}x\pm\sqrt{x+1}$ は右図の青い曲線である．



■　この双曲線の軸の方程式を求めるとき，楕円や双曲線の場合と同じ方法ではできない．それは，放物線には点対称の中心がないからである．

■　$y=ax\pm\sqrt{x+b}$ は $(y-ax)^2=x+b\cdots$①
と同値である．①は直線 $y=ax+k\cdots$②
と 1 点 A $(k^2-b,\ ak^2+k-ab)$ で交わる．
②に垂直で O を通る直線 $x+ay=0\cdots$③
を考える．

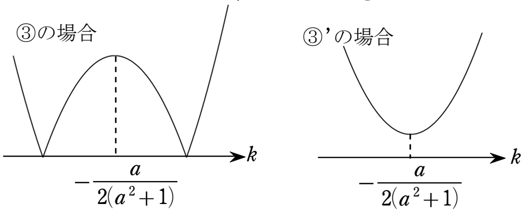


点 A から直線③へ下ろした垂線の長さ d が，極大(図の③の状態)または極小(図の③'の状態)のとき，点 A は①の「頂点」になる．そして，そのとき②の直線が①の軸になる．

$$d=\frac{|k^2-b+a(ak^2+k-ab)|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|(a^2+1)k^2+ak-(a^2+1)b|}{\sqrt{1+a^2}}$$

であるから，$y=(a^2+1)k^2+ak-(a^2+1)b$ とおく．

$y'=2(a^2+1)k+a$ から，$y'=0$ として，$k=-\dfrac{a}{2(a^2+1)}$ よりこのときに極大または極小となり，このとき②は軸になる．



よって，①の軸は $y=ax-\dfrac{a}{2(a^2+1)}$ である．

■　ここで「頂点」と「」書きにしたのは，この放物線を軸が座標軸に平行になるように回転した場合に，頂点となる点という意味合いである．

①の極小点・極大点を頂点と見る見方があるかどうか知らず，そのことに配慮してみたが，杞憂かも知れない．

2012 年 8 月 3 日