雑感　半角の三角比の漸化式

■ 2017 年広島大の問題.

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{a_n{}^2+1}+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める.

(1) $a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}$, $a_3=\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ.

(2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法で示せ.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n a_n$ を求めよ.

■ (1), (2)に共通する計算は，恐らく次の式変形である.

$$\frac{\tan 2\theta}{\sqrt{\tan^2 2\theta+1}+1}=\frac{\tan 2\theta}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 2\theta}}+1}=\frac{\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}{\dfrac{1}{\cos 2\theta}+1}=\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)}=\tan\theta$ （より簡潔な変形があるかも知れぬが）.

とすると，一般項 $a_n=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ の推測や，(3)の $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ の利用を含め，平易である.

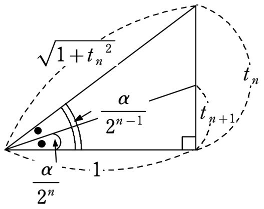
■ 角は全て鋭角として，逆に一般項から漸化式を導いてみよう.

$t_n=\tan\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$ のとき，t_{n+1} を t_n で表す.

アプローチとしては，上の式変形の逆を辿るのが 1 つ.

もう 1 つは図形的な考察による.

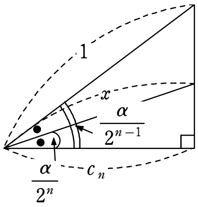
右図で，角の 2 等分線の性質を用いれば $t_{n+1}=\dfrac{t_n}{\sqrt{1+t_n{}^2}+1}$ で一発である.



■ cos については，$c_n=\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$ とすると，$c_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}}$ というすっきりした関係が成り立つ.

右図を利用した場合，角の 2 等分線の長さ x の計算が煩わしい.

よく知られた公式(*) を用いれば



$$x=\sqrt{1\cdot c_n-(1-c_n{}^2)\cdot\frac{1\cdot c_n}{(1+c_n)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{c_n}\sqrt{(1+c_n)^2-(1-c_n{}^2)}}{1+c_n}=\frac{\sqrt{2}c_n}{\sqrt{1+c_n}}$$

であり，これにより

$$c_{n+1}=\frac{c_n}{x}=\frac{c_n\sqrt{1+c_n}}{\sqrt{2}c_n}=\sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$$ となる.

実は，cos では式変形が易しい．半角公式から

$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ で，$c_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}}$ は一発である.

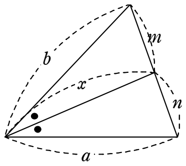
こんなに単純な漸化式だが一般項を求めるのは困難で，強いて求めれば，$c_n=\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$ $(\alpha=\arccos c_1)$ なのであろう.

■ 実は tan も，2 倍角の公式から $t_n=\dfrac{2t_{n+1}}{1-t_{n+1}{}^2}$ であるから，これを t_{n+1} の 2 次方程式 $t_n t_{n+1}{}^2+2t_{n+1}-t_n=0$ として，$t_{n+1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+t_n{}^2}}{t_n}$ から求める方法もあり，計算が容易である.

■ sin は $s_n=\sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$ に対して，$s_{n+1}=\dfrac{s_n}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-s_n{}^2})}}$ であろうか．3 つの中では一番複雑である.

■ なお，cos で用いた公式(*) は次の通り.

右の三角形において　$x=\sqrt{ab-mn}$ が成り立つ.



2017 年 11 月 01 日