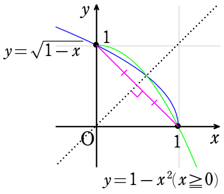
雑感　元の関数と逆関数の共有点の座標

■　関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$ の共有点の座標を求める計算は煩雑である．

2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，そのことを利用しようとするとき，

> 2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$ が共有点をもつ場合
> 「$y=f(x)$ と $y=x$ との共有点 $\Rightarrow$ $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ の共有点」
> という命題は真だが，逆は必ずしも真ではない．

したがって，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$ の共有点を求めるとき，$y=f(x)$ と $y=x$ との共有点から求めようとすると，求めるべき共有点を落としてしまう可能性がある．



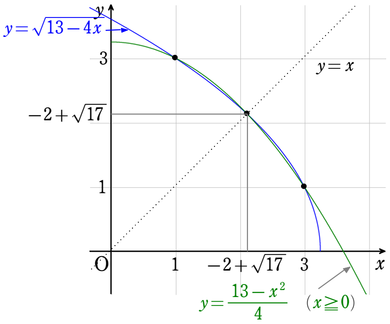
例えば，非常に簡単な例だが
$y=\sqrt{1-x}$ とその逆関数 $y=1-x^2(x\geqq 0)$ について，直線 $y=x$ 上にない 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$ は 2 つの曲線の共有点である．

■　このような直線 $y=x$ 上にない共有点は，もともと $y=f(x)$ 上に存在する $y=x$ に関する対称点である．したがって，このような共有点が存在する関数 $f(x)$ は単調減少関数である．

■　このような共有点が（それほど自明でない）格子点であるような関数例を，$a>0$，$b>0$ として $y=\sqrt{b-ax}$ の形の関数で探した結果が次の通りである．

	関　　数	格子点の共有点	$y=x$ 上の共有点の x 座標
①	$y=\sqrt{7-3x}$	$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$	$(-3+\sqrt{37})/2$
②	$y=\sqrt{13-4x}$	$(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$	$-2+\sqrt{17}$
③	$y=\sqrt{21-5x}$	$(1,\ 4)$, $(4,\ 1)$	$(-5+\sqrt{109})/2$
④	$y=\sqrt{19-5x}$	$(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$	$(-5+\sqrt{101})/2$
⑤	$y=\sqrt{31-6x}$	$(1,\ 5)$, $(5,\ 1)$	$-3+2\sqrt{10}$
⑥	$y=\sqrt{28-6x}$	$(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$	$-3+\sqrt{37}$

②のグラフを描くと，右の通りである．



$y=x$ 上の共有点の x 座標は，方程式 $\sqrt{b-ax}=x$ $(x\geqq 0)$ の解であるから，
$x^2+ax-b=0$ から
$x=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$
である．

■　これらの例で，$y=x$ 上の共有点の座標が煩雑なのが気になる．この共有点も格子点にできないものだろうか．

$y=\sqrt{b-ax}$ 上に，2 つの格子点 $(p,\ q)$，$(q,\ p)$ $(p\neq q)$ が存在すると，$b-ap=q^2$，$b-aq=p^2$ から，$a=p+q$，$b=p^2+pq+q^2$ である．このとき，方程式 $\sqrt{b-ax}=x$ $(x\geqq 0)$ の解は

$x=\dfrac{-(p+q)+\sqrt{5p^2+6pq+5q^2}}{2}$ である．これが整数となるような p，q を探すと，次のような関数例が見つかった．

	関　　数	格子点の共有点	$y=x$ 上の共有点
⑦	$y=\sqrt{133-12x}$	$(1,\ 11)$，$(11,\ 1)$	$(7,\ 7)$
⑧	$y=\sqrt{481-24x}$	$(5,\ 14)$，$(14,\ 5)$	$(13,\ 13)$

係数が大きいが，⑦の計算はそれほど煩雑ではない．

2012 年 6 月 20 日