雑感　群数列が難しい

■　群数列を授業で扱うと，多くの生徒が頭を抱える．指導も容易でなく，1時間に1つの例題を扱い，1問の演習がやれたらよしとしなければならないが，演習で鉛筆が動かない生徒が多い．できれば扱いたくないが，センター試験にも出題されたりする(2010年)ので，パスするわけにもいかない．

■　群数列には大きく言って2つのタイプがある．1つは

1 | 2, 3, 4 | 5, 6, 7, 8, 9 | 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 | 17, …

のように，もとの数列$\{a_n\}$に対して，a_nがnの式で表すことが可能なタイプである．もう1つは

1 | 3, 2, 1 | 5, 4, 3, 2, 1 | 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 | 9, 8, …

のように，a_nをnで表すことは難しいが，第k群のj番目の項が容易に分かるタイプである．

■　最初のタイプでよく問われる内容は，次のようである．

①　第n群の最初の項　②　第n群の総和　③　ある項が何群の何番目か

生徒たちにとって，もとの数列と項の個数の数列の2つが絡み合う群数列は難しく，しっかりと理解しないとお手上げ状態のようだ．

このタイプについての「一般論」を展開してみたが，これで群数列が分かるようになるわけでもない….

■　数列　$a_1,\ a_2, \ldots, a_{n-1},\ a_n,\ \ldots$　を，第k群にb_k個の項が含まれるように群に分けていく．

$$a_1,\ \ldots\ /\ \ldots\ldots\ /\overbrace{\underbrace{a_{\bigcirc},\ \ldots\ldots,\ a_{\triangle}}_{b_{n-1}\text{個}}}^{\text{第}(n-1)\text{群}}/\overbrace{\underbrace{a_{\bullet},\ \ldots\ldots,\ a_{\blacktriangle}}_{b_n\text{個}}}^{\text{第}n\text{群}}\ /a_{\circledcirc},\ \ldots$$

このとき，第n群の最初の項の番号●や最後の項の番号▲を明らかにする必要がある．

第n群の最後の項の番号▲を$l(n)$と表すことにすると，

$$l(n)=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

であり，第$(n-1)$群の最後の項の番号△は$l(n-1)$であるから，第n群の最初の項の番号●は$l(n-1)+1$である．

よって，上の群数列は次のようになっている．

$$a_1,\ \ldots/\ \ldots\ /\overbrace{\underbrace{a_{l(n-2)+1},\ \ldots,\ a_{l(n-1)}}_{b_{n-1}\text{個}}}^{\text{第}(n-1)\text{群}}/\overbrace{\underbrace{a_{l(n-1)+1},\ \ldots,\ a_{l(n)}}_{b_n\text{個}}}^{\text{第}n\text{群}}\ /a_{l(n)+1},\ \ldots$$

よって，第n群のm番目$(1\leqq m\leqq b_n)$の項は$a_{l(n-1)+m}$となる．

次に，第n群の総和$s(n)$は

$$s(n)=\sum_{k=l(n-1)+1}^{l(n)}a_k=\sum_{k=1}^{l(n)}a_k-\sum_{k=1}^{l(n-1)}a_k=S_{l(n)}-S_{l(n-1)}$$

となるが，この式を使って総和を求めることは，まれであろう．

さらに，ある数cがこの数列の項であって，それが第何群の何番目の項かを明らかにする．

cが第n群にあるとして，不等式　$a_{l(n-1)+1}\leqq c\leqq a_{l(n)}$　または　$a_{l(n-1)}<c\leqq a_{l(n)}$　を解けばよいが，次のように番号で処理をする方が平易なことが多い．

$a_k=c$　を満たす番号kを求めると，cはこの数列のk番目にある．これが第n群に属するとすると，項の番号から
$l(n-1)+1\leqq k\leqq l(n)$または　$l(n-1)<k\leqq l(n)$を満たすnを求めればよい．しかし，数列　$\{l(n)\}$　が単調に増加することを用いて，$l(n-1)<k$を満たす最大のnまたは$k\leqq l(n)$を満たす最小のnを求めた方が簡便である．

なお，このcはこの第n群の$k-l(n-1)$番目にあることになる．