雑感　　**不等式の証明（その 2）**

■　大学入試でいわゆる有名不等式の出番が少なくなっている中で，相加平均・相乗平均の関係は，健在である．

■　2005 年の『入試問題集』を見ていたら，徳島大学（医・歯・薬学部）が，相加平均・相乗平均の一般の場合について，次のような出題をしている．

> 自然数 n に対して，$a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots,\ a_n>0$ とする．次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．
>
> $$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqq a_1a_2\cdots a_n$$

■　相加平均･相乗平均の証明の方法は 50 通り以上あるという．大学入試などで，誘導付きのものとしては微分法を使ったり，関数 $y=\log x$ の凸性を利用したりするものがよく知られている．

ところが，誘導もない(数学的帰納法は誘導ではなく，方法の指示である)場合，この証明が容易でないことは知る人ぞ知るものであろう．

この不等式を数学的帰納法で直接証明するには，$n=2^p$ の場合を帰納法で証明し，$2^{p-1}<n<2^p$ の場合をある置き換えによって証明するのが一般的らしい（下記の URL 参照）．

http://whs-math.net/math/sec771.html

手元の「入試問題集」の解答もそれで証明してある．

■　こういった非常に特殊な証明方法の「知識」が要求される入試問題ってありなのかなと思う（私が無知であることは認めるが，受験生にこれを要求するのだろうか）．

ところが，いろいろ調べていたらこの入試問題の原題は

> (1)　A を自然数とし，関数 $f(x)=\left(\dfrac{A+x}{n+1}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{A}{n}\right)^n x$ を考える．
>
> $x>0$ のとき，$f(x)\geqq 0$ が成り立つことを示せ．
>
> (2)　は上記$\boxed{}$の中の問題．

という誘導付きであることが分かった．

これならば，非常識な出題ではない．非常識は，(1)を省いて(2)だけを問題集に収録した編集者にある．

■　2008 年 8 月 18 日の朝日新聞に，「高校の数学で習う定理の新しい証明法を県立倉敷古城池高校教諭の内田康晴さん(49)が見つけ，オーストラリアの数学専門誌に論文が掲載された．」「高校生でも理解できる簡単な方法だった．」という記事が載った．

定理とあるが，相加平均・相乗平均の一般の場合の証明であり，論文は http://jipam.vu.edu.au/article.php?sid=988 で閲覧できる．日本語では http://www.sqr.or.jp/usr/haru/websitemodel/rezume3.pdf に証明や背景が述べられている．

「高校生でも理解できるほど簡単な方法」かどうかは何とも言い難いが，原理は次の補題であり，原理そのものは易しい．

補題：$a_1\geqq a_2,\ b_1\geqq b_2$ のとき，$a_1b_1+a_2b_2\geqq a_1b_2+a_2b_1$

を用いて，$a_i>0$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^n\geqq n\prod_{i=1}^{n}a_i$ を示すことができる．

$n=3$ のときを仮定し，$n=4$ のときを示してみる．

$a_1\geqq a_2\geqq a_3\geqq a_4>0$ とし，${a_1}^3+{a_2}^3+{a_3}^3\geqq 3a_1a_2a_3$ を仮定すると，補題と仮定により

$${a_1}^4+{a_2}^4+{a_3}^4+{a_4}^4={a_1}^4+{a_2}^4+{a_3}^3a_3+{a_4}^3a_4\geqq{a_1}^4+{a_2}^4+{a_3}^3a_4+{a_4}^3a_3$$

$$\geqq{a_1}^4+{a_2}^3a_4+{a_3}^3a_4+{a_4}^2a_2a_3\geqq{a_1}^3a_4+{a_2}^3a_4+{a_3}^3a_4+a_4a_1a_2a_3$$

$$=({a_1}^3+{a_2}^3+{a_3}^3)a_4+a_1a_2a_3a_4\geqq(3a_1a_2a_3)a_4+a_1a_2a_3a_4=4a_1a_2a_3a_4$$

となり，示された．

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^n\geqq n\prod_{i=1}^{n}a_i$ において，a_i を $\sqrt[n]{a_i}$ で置き換え，両辺を n で割って n 乗すると，上記$\boxed{}$の形になる．