## 雑感　不等式の証明(その 1)

■　この夏,「不等式の（微積分を使わない）証明」を研修のテーマと設定し，過去 15 年ほどの大学入試問題を研究している.

■　2008 年に千葉大学医学部が，次のような出題をしている.

> 実数 $a,\ b$ は $0<a<b$ を満たし，$x,\ y,\ z$ はいずれも $a$ 以上，$b$ 以下であるとする．このとき，次のことを示せ.
> (1)　$x+y=a+b$　ならば，$xy \geqq ab$ である.
> (2)　$x+y+z=a+2b$　ならば，$xyz \geqq ab^2$ である.

■　一般に, 問題中の文字に(平等でない)条件が付随している場合は，証明が容易でないことが多いような気がする.

まず(1)であるが，差をとって計算してみる.

(左辺)−(右辺)＝ $xy-ab=x(a+b-y)-ab=-x^2+(a+b)x-ab$

ここからの進み方が 2 通り考えられる.

- 第 1 の方法：$-x^2+(a+b)x-ab=(b-x)(x-a)$ と因数分解する．ここで，条件 $a \leqq x \leqq b$ によって $b-x \geqq 0$，$x-a \geqq 0$ から (左辺)≧(右辺) である.
- 第 2 の方法：これは $x$ の 2 次関数であり，$f(x)$ とおく.

$$f(x)=-x^2+(a+b)x-ab=-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{ で,}$$

条件 $a \leqq x \leqq b$ によって，$f(x) \geqq f(a)=f(b)=0$ である.

■　(2)をどうするか. 無論(1)と同様に差をとって文字を減らす.

$g(x)=xyz-ab^2$ とおくと，

$g(x)=xy(a+2b-x-y)-ab^2=-yx^2+y(a+2b-y)x-ab^2$

である．ここからどうするか？

手元にある「入試問題集」は，様々な条件から $xy \geqq ab$ を導きだし，$g(x) \geqq a(b-x)(b-y) \geqq 0$ を結論したり，$xy$ 平面上に不等式領域を描いて，$-x+a+b \leqq y \leqq b$ という条件式を導いて使ったりして，苦労の跡が忍ばれる.

■　(1)と同様のアプローチはできないものか.

$g(x)$ を $x$ の 2 次関数と見る．$g(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，頂点の $x$ 座標は $\dfrac{a+2b-y}{2}$ であるが，条件 $a \leqq y \leqq b$ によって，$a<\dfrac{a+b}{2} \leqq \dfrac{a+2b-y}{2} \leqq b$ を満たしている．したがって $a \leqq x \leqq b$ における最小値は，$g(a)$ と $g(b)$ のうち小さい方.

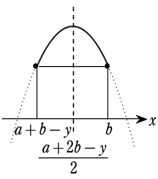
$g(a)=-a(y-b)^2 \leqq 0$　えっ！　これはまずいぞ.

$g(b)=b(y-a)(b-y) \geqq 0$　はいいとしても….

ん？　おっと，いけない，いけない．文字を減らすために代入に用いた $z=a+2b-x-y$ から範囲を求めることを忘れていた！　$a \leqq z=a+2b-x-y \leqq b$ から，$a+b-y \leqq x \leqq 2b-y$ であったぞ．さらに，条件 $a \leqq x \leqq b$ との共通部分をとって，$a+b-y \leqq x \leqq b$ …①　である.

したがって，$g(x) \geqq g(a+b-y)=g(b)=b(y-a)(b-y) \geqq 0$ で，めでたし，めでたし.

こうやってみると，$g(x)$ の軸が①の中点であり，安心できる.




■　そうだ．雑誌『大学への数学』はどうしているだろうか？　2008 年 7 月号，pp.41.

果たして，同じことをやっていたが，差をとらずに $xyz$ についてこれを $y$ の 2 次関数として処理し，その最小値が $ab^2$ であるとしている.

差をとった方が，上のようにきれいな式になるのに….