雑感　**三角関数の積分**

■　今年度の 2 年生理系の数学Ⅲも，不定積分までやって終わることができた．例年通りの進度である．教科書を一通りやった後，どれだけ演習ができるかが鍵である．

■　三角関数だけ取り出してみると，その積分について，使用している教科書は次のような流れである．

まず，$\sin x$, $\cos x$, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ の積分の基本公式がある．

さらに $\cos x = u$ とおく置換積分として $\cos^2 x \sin x$ の積分が，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}$ とみる $\tan x$ の積分が扱われる．

そして，半角公式を用いる $\sin^2 x$ の積分，積和公式を用いる $\sin 3x \cos 2x$ の積分が取り上げられる．

最後に応用として，$\sin^3 x$ の積分が $\cos x = u$ とおく方法で，$\dfrac{1}{\sin x}$ の積分が $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ として $\cos x = t$ とおき，部分分数分解をする方法で登場する．もちろん，$\sin^3 x$ については 3 倍角の公式を用いる別解も指導しておく．

例として $\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ の変形を用いた $\tan^2 x$ の積分も出てくるが，この扱いも欠かせない．

■　こうやってみると，積分には一筋縄でいかない難しさがあり，問題が at random に登場すると，どうやって良いのか苦労する生徒も多い．

その難しさや困難さは，ちょうど式の展開と因数分解の関係と同じだ．式の展開は容易だが，逆の演算の因数分解はテクニカルで難しい．それと同じように，関数の微分は容易だが，積分は視力を要求され，職人芸的である．

■　生徒の中には想定外の解き方をする者がいて，驚かされる．

例えば，$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$ では，$\sin x = u$ とおく置換積分を見抜けずに，「$\sin^2 x$ があったら半角だ」という発想で，さらに 3 倍角まで登場させて，$\sin^2 x \cos^3 x = \dfrac{1-\sin 2x}{2} \cdot \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$ とし，さらに積和も用いるというアクロバチックで，強引な式変形に持ち込む輩がいる．

問題集の解答は $\sin x = u$ とおいて，$\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$ という答を示しているが，上のアクロバチックな式変形では

$-\dfrac{1}{16}\cos 5x - \dfrac{1}{16}\cos 3x + \dfrac{1}{8}\cos x + C$ という答になるはずである．

しかし，この 2 式が同じかどうかの判断は容易でない．私は 2 つの関数のグラフを重ね書きしてみるけれども….

■　実際，試験でうっかり採点ミスをするところだった．

基本問題で $\int \cos 3x\,dx$ というのを出題した．基本公式で処理できて，$\frac{1}{3}\sin 3x + C$ が答である．ところが，こんな答案があった．

$$\int \cos 3x\,dx = \int (4\cos^3 x - 3\cos x)dx$$

$$= 4\int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx - 3\int \cos x\,dx = \int \cos x\,dx - 4\int \sin^2 x \cos x\,dx$$

この第 2 項で $\sin x = u$ とおくと $\cos x\,dx = du$ で，

$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ であるから

$\int \cos 3x\,dx = \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + C$

間違ってはいないが，ご苦労様としか言いようがない．

2012 年 3 月 21 日