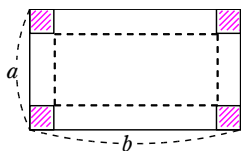


雑感 箱の容積最大問題と折り紙

■ 縦、横の長さがそれぞれ a, b の長方形の紙がある。4 隅から合同な正方形を切り取り、直角に折り曲げて蓋のない箱を作る。容積を最大にするには切り取る正方形の 1 辺の長さをどれだけにしたらよいかは、3 次関数の微分法の問題として、容易に解決でき、その長さは $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ である。



■ 手元に定規などがなく、その紙のみがある場合、容積が最大となるような箱を作ることができるだろうか。もちろん、紙をのり付けする材料はあるものとしての話である。

答は Yes である。

その折り紙的手法を次に載せるが、大きく 3 段階に分かれる。

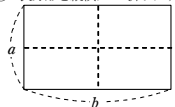
(A) $\frac{a+b}{2}$ の長さを作る (B) $\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{2}$ の長さを作る

(C) $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{2}$ の長さを作り、3 等分する

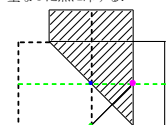
■ 3 つの流れに沿って説明すれば、おおよそ次の通りである（もしかしたら、もう少し効率的な方法があるかも知れない）。文字が小さくて申し訳ないが、拡大してご覧あれ。

(A)

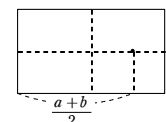
① 長方形を縦横に 2 つ折りにする。



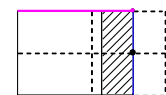
② 長方形の中心を固定して、● を --- に合わせるようにして折り、重なった点に印する。



③ 下図のように $\frac{a+b}{2}$ の長さが決まる。

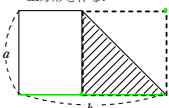


④ 下図のように折って、 $\frac{a+b}{2}$ の長さを上辺に移しておく。

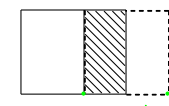


(B)

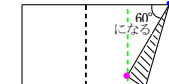
⑤ 下図のように折って、右側に正方形を作る。



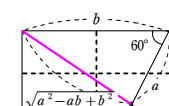
⑥ 正方形部分を縦に 2 等分する。



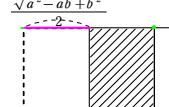
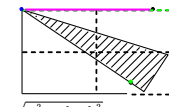
⑦ 下図のように、● を ↓ に合わせて折り、重なった点に印する。



⑧ ⑦ で付した印と長方形の左上の頂点を結ぶように折ると、 $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ の長さが決まる。

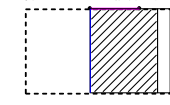


⑨ 下図のように折って、この長さを上辺に移し、さらに 2 等分しておく

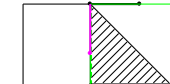


(C)

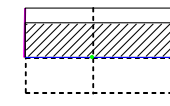
⑩ ④と⑨で得られた線分の長さの差が下図のピンクの線分。この左端で縦折りする。



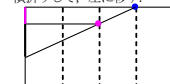
⑪ この線分を縦にコピーするために、直角を 2 等分折りして線分の端を印する。



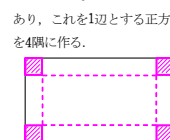
⑫ この縦線分を左端にコピーするために、印で横折りする。



⑬ 長方形を縦に 4 つ折りにし、下図のように、● と線分の下端を横折りして、図の ● を決め、横折りして、左に移す。



⑭ このピンクの長さが $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ であり、これを 1 辺とする正方形を 4 隅に作る。



■ 余弦定理を用いる $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ の長さ作りが（自画自賛ながら）絶妙だが、折り紙の可能性と威力をまざまざと思い知らされる。