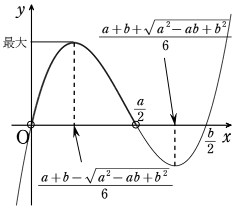
雑感　ファイナル授業

■　この3月で定年退職である．38年間の教員生活に区切りをつけるにあたって，最後になる2年生理系のあるクラスの授業を「公開授業」とした．余り大っぴらにはアナウンスをしなかったが，10名を超える先生方が参観してくださり，ありがたいことであった．
　授業は，「箱の容積の最大」を材料として，学習指導で心がけてきたことを，生徒や参観者してくださった方々にお伝えしようと試みた．

■　全員にB5の紙(182mm×256mm)を1枚ずつ配った．「この紙の4隅から1辺の長さが x cmの合同な正方形を切り取り，直角に折り曲げて箱を作る．この箱の容積を最大にするには，x の値をどれくらいにすればいいと思うか予想させた．
「作った箱いっぱいの砂金をあげるぞと言われたら，できるだけ大きくしたいだろ」「あたった人には，豪華じゃないけど景品をあげるぞ」などと言いながら．
　予想結果を集約して板書した．正確な記憶はないが，x の値の予想結果は大まかには次のようであった．

	3.0cm以下	3.5cm以下	4.0cm以下	4.5cm以下	それ以上
人数	8人	0人	12人	13人	7人

■　長方形の2辺の長さを $a,\ b\ (a<b)$ として，容積 $f(x)$ を式にさせ，x の値の範囲を確認した．
　$f(x)=(a-2x)(b-2x)x\ \ (0<x<a/2)$ である．
「どうやったらこの問題を解決できるか」の問いに，「微分する」という返答があって，安心する．
　$f'(x)=12x^2-4(a+b)x+abx$ で，$f'(x)=0$ の解を求めると
$x=\dfrac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ である．ここで，増減表の作成と行くところだが，たかが3次関数なので，いきなりグラフに行く．
「$y=f(x)$ のグラフは x 軸と3点で交わるけど，その座標は？」の問いかけにも，0と $a/2$ と $b/2$ と正解が返ってくる．
　グラフの概形を板書し，必要な値を書き込み，$0<x<a/2$ に制限する．



　これから，$x=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ のとき最大となることを確認する．

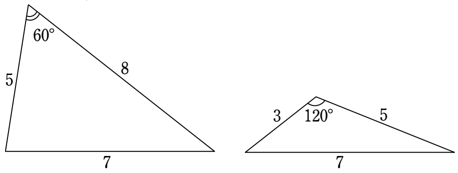
■　さて，試験でこのような問題を出題するとき，$a,\ b$ の値をいい加減に設定すると，x の値が複雑になってしまうことを，$a=3,\ b=4$ などで，確認する．
　複雑になる原因を聞けば，「$\sqrt{\ }$」というぶっきらぼうな返答．では，$\sqrt{\ }$ の中がどんな数だったらいいかとさらに聞けば，「4とか」という返答があり，「そうだね」と肯く．
　「だから，試験や演習問題では，この $\sqrt{\ }$ が外れるような設定を工夫しながらしていたんだ．こういった工夫はいろいろな場面で必要で，様々な問題で設定の方法を考えながら問題を作っていたんだよ」と語る．

■　そこで，「では，この $\sqrt{\ }$ の中が整数の2乗になるような $a,\ b$ の値を誰か知らないかな？」と尋ねてみる．何人かが鉛筆を動かして計算している．見つかったか数名に聞くが，誰も「No」であるのは致し方なかろう．
　そこで，$c^2=a^2-ab+b^2$ という式を板書する．「こんな形の式，どこかで出てこなかったかなあ？」と問いかけるが，今ひとつ反応が鈍い．そこで「○○定理」とヒントを出す．まだ首をひねっている者が多いが，ある生徒を指名すると「余弦定理」とずばり正解が返ってきた．「その通り．で，角度は？」「60°」
　C＝60°の△ABCを板書する．この3辺が整数になるものを知

2012年3月27日

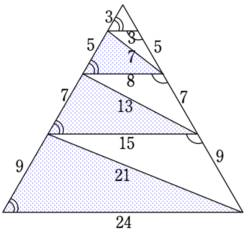
らないかなと尋ねるが，それでも出てこない．

■　「みんなは名古屋三角形や，七五三(しちごさん)三角形を知らないのかな？」と言っても，「何だそれ？」という顔．



「こういった三角形があるんだよ．名古屋(7-5-8)，七五三(7-5-3)の三角形は7の長さの辺に向かう角が，それぞれ60°, 120°になるんだ．確かめてごらん」に「へー」と感心している．
「この三角形の辺の長さから，$a=5,\ b=8$ を使えば，$\sqrt{\ }$ の中が49となって，$x=(5+8-7)/6=1$ のとき最大になるんだよね」

■　「こんなのもあるよ」といって，次のような三角形を板書する．ここに，今の条件を満たすような三角形が次々と現れるんだ．
「3辺の長さは，
$2k+1,\ k(k+2),\ k^2+k+1$ だったかな」
「他のタイプのピラミッドも作れるんだけどね」
生徒からは，またもや「へー」という反応．



■　数学の1つの問題でも，いろいろなことが関係して絡み合っていて，とても面白い．数学に限らず，様々な科学は同じ側面を持っている．だから，1つのことを深く掘り下げることは大事だが，同時に関係なさそうなことでも，浅くても良いから様々なことを勉強しておくと，思わぬところで思わぬ結びつきがあったりすることに気づいて研究が進展することがある．
将来，大学に行って勉強したり，研究したりするときこんなことを心がけておくと良いよと，生徒に語る．

■　さて，x の値の正解発表である．しきりに鉛筆を動かしている生徒がいたので，「計算した？」と尋ねたが，「やってない」ということなので，$a=18.2,\ b=25.6$ のときの容積が最大となる値を発表する．
「$x=3.496\cdots$ で，約3.5cmです」というと，黒板の予想結果を見て歓声が上がる．何と該当者が誰もいなかったのだ．
「豪華じゃない景品だから，わざと外したのか」と笑いながら，「自分が一番近いと思う人は，後でおいで」と．

■　「1枚の紙が与えられたとき，大まかにこの値が出せたらいいよね．もし正方形の紙だったら，1辺の1/6だということは，教科書の例題にあったけど，この場合2辺の相加平均の1/6だと3.65cmになるので，近いと言えば近いんだよ」

■　残り時間を見ると後2分．演習に行くわけにも行かないので，「紙が与えられたら，折り紙でこの長さを折り出すことはできないかな？」「最後に6等分するときがちょっと微妙だけど，できるはずだよ」と言うと，紙を折り始める．「$\sqrt{\ }$ の部分の値は，60° をつくれば出せるよ」とヒントを出すが，残り時間では無理な要求だった．
それくらいだったら，容積最大のとき「底面積＝側面積」の話に持っていくべきだったと反省．

■　授業を終わったら，図らずも拍手があり，感謝を述べて授業を終わった．何人かの生徒が教卓に寄ってきて，「自分の予想が近い」などと言ってくる．
ファイナル授業の意図は十分には伝えられなかったかも知れないけれども，記念になる授業ができた．

2012 年 3 月 27 日