雑感　特殊三角形利用のオリジナル問題

■　実力考査などの問題作成ではオリジナル問題の出題を心がけていたが，図形問題では問題作成に苦労することが多かった．

先日『幾何学大辞典』（槙書店）の第 3 巻を見ていて，その第 5 章に「特殊三角形」の性質が取り上げられているのに気がついた．一般の三角形に比べて条件が特殊だけに，「へぇ～」という性質があり，オリジナル問題作成に使えるかも知れないと考え，作成を試みた．

■　「**正三角形**」の 892 に次のような性質が載せられている．

正三角形 ABC の 1 辺 BC 上に点 A′ をとって，$BA' = \frac{1}{3}$ BC ならしめ，また AB 上に 1 点 C′ をとり， AC′＝C′A′ ならしめれば， CC′＝A′B＋BC′.

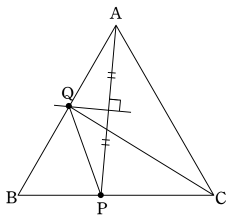
この命題を見たとき，思ったことが 2 つある．

1 つは，「AB 上に 1 点 C′ をとり， AC′＝C′A′ ならしめ」る方法を与えて，「 AC′＝C′A′ 」に気づかせるのが良いのではないか．

もう 1 つは， A′ の位置は BC 上の他の点ではダメなのか．

以上のことを考慮に入れて出来上がった問題が，次の通り．

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 BC 上の点 P（ただし，$P \neq B$，$P \neq C$）に対して，線分 AP の垂直 2 等分線と辺 AB の交点を Q とする．
CQ＝BP＋BQ の関係が成り立つとき，P の位置を定めよ．



■　解法は幾つかあるだろうが，余弦定理を用いるのがよかろう．略解は以下の通り．

AQ＝PQ でこれを x ， QC＝ y ， BP＝p とすると，

BQ＝$1-x$ である．

△AQC で余弦定理により，

$y^2 = x^2 + 1^2 - x \cdot 1 = x^2 - x + 1$　… ①

同様に△BPQ で $x^2 = p^2 + (1-x)^2 - p(1-x)$ より，

$(2-p)x = p^2 - p + 1$　… ②

CQ²＝(BP＋BQ)² であるから， $y^2 = (p+1-x)^2$ が成り立つ．①より

$x^2 - x + 1 = p^2 + 1 + x^2 + 2p - 2x - 2px$ で， $(2p+1)x = p^2 + 2p$ … ③

③－②から $(3p-1)x = 3p-1$ で， $x \neq 1$ （∵PQ は 1 辺が 1 の正三角形の内部の線分だから， $0 < x < 1$ ）．

よって， $p = \frac{1}{3}$ となり，P は辺 BC を 1 : 2 に内分する点である．

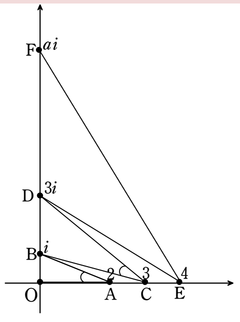
■　この問題を 2，3 年生で出題すると座標を用いて解こうとする生徒が続出すると思われる（垂直 2 等分線が座標を誘うかと考えられる）．しかし，線分の長さが $\sqrt{\quad}$ を含んだ式で出てくると，苦労するかも知れない．

■　「**直角 2 等辺三角形**」の 870 に次がある．

直角 2 等辺三角形の 2 辺 AB，AC 上に点 D，E をとり，
AD＝ $\frac{2}{3}$ AB，AE＝ $\frac{1}{3}$ AC ならしめれば，∠ADE＝∠EBC.

様々な方法で証明が可能であるが，ここでは複素数平面の問題として，これを手がかりとした問題を作ってみた．

複素数平面上に点 O(0)，A(2)，B(i)，C(3)，D(3 i)がある．
以下の問いに，複素数を用いて答えよ．
(1)　∠OAB＝∠BCD であることを示せ．
(2)　a を 3 より大きい実数とする．点 E(4)，F(ai)に対して，
∠DEF＝∠OAB となるとき， a の値を定めよ．



■　略解　(1)　$\angle OAB = \arg\frac{i-2}{0-2} = \arg(2-i)$,

$\angle BCD = \arg\frac{3i-3}{i-3} = \arg\frac{3(1-i)(3+i)}{9+1}$

$= \arg\frac{3(2-i)}{5} = \arg(2-i)$ から成り立つ．

(2)　$a > 3$ であるから， $\angle DEF = \arg\frac{ai-4}{3i-4}$

$= \arg(4-ai)(4+3i)$　$= \arg\{(3a+16)-4(a-3)i\}$ で，

これが $\arg(2-i)$ に等しいから，

$(3a+16):4(a-3) = 2:1$ で，これより $a = 8$.

■　ベクトルの内積や tan の加法定理利用の問題としての出題素材としてもよいだろう．なお，さらに G(5)，H (bi) として∠FGH＝∠OAB とした場合，残念ながら b は整数にならない．

2021 年 9 月 01 日