雑感　円のベクトル方程式

■　円のベクトル方程式がある．

教科書には，点 A$(\vec{a})$ を中心とし，半径 r の円のベクトル方程式が　$|\vec{p}-\vec{a}|=r$　であるというのが登場し，練習問題などで，2 点　A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円の方程式を求めさせたりする．

発展的などには，円の接線のベクトル方程式が内積を用いて扱われることもあるが，この程度の扱いで深入りはしない．

■　しかし，$|\vec{p}-\vec{a}|=r$ が円を表す方程式であると言うことがどうもしっくりしない．その理由は，例えば直線の方程式 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ などでは，パラメータ t の値と，点　P$(\vec{p})$ の位置関係が明瞭で，いかにも方程式っぽい．ところが，$|\vec{p}-\vec{a}|=r$ にはパラメータも使われていないので，「方程式」と言う印象が薄いことが原因であろう．

■　ベクトル方程式に対して，点の座標やベクトルの成分を与えて座標の方程式を導くような問題が散見されるが，そういったこと以外には問題解決の用途に用いられることも少ない．

もちろん，$|\vec{p}-\vec{a}|=r$ を平面のベクトルととらえず，区間のベクトルととらえれば，同じ方程式で「球面のベクトル方程式」になるなどと言った利便があることは承知の上ではある．

■　そこで円のベクトル方程式を整理しつつ，それを用いて解く問題を作成してみたい．

まず，円の決定条件からベクトル方程式を作ってみる．

(1)　中心と半径が与えられた円については，すでに触れた $|\vec{p}-\vec{a}|=r$ である．

(2)　直径の両端が 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ の円は，中心が線分 AB の中点で，半径が線分 AB の長さの半分であるから，

$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\left|\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}\right|$ である．

あるいは，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ であることから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ より

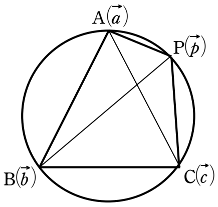
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$　としてもよい．

姿形は上と異なるが，上の方程式の両辺を 2 乗して内積計算すれば，同じものであるとわかる．

これら(1)，(2)は教科書レベルである．

(3)　点 A$(\vec{a})$ を中心とし，点 B$(\vec{b})$ を通る円は，半径が AB であるから　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}-\vec{a}|$　である．

(4)　一直線上にない 3 点 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を通る円は，難しい．よく知られた「公式」があるのかどうかも知らない．



試みに，トレミーの定理の逆を用いると

AC・BP＝AB・CP＋AP・BC

から

$|\vec{c}-\vec{a}||\vec{p}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}||\vec{p}-\vec{c}|+|\vec{p}-\vec{a}||\vec{c}-\vec{b}|$

ができるが，これは点 P が弧 AC 上にある条件に過ぎない．

点 P が弧 BC 上にあれば，上の式は成り立たない．

そこで，円周角の定理を用いて，$\cos\angle\mathrm{APB}=\pm\cos\angle\mathrm{ACB}$　であることから，　$\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\right)^2=\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}\right)^2$．

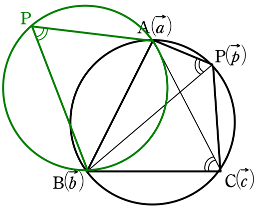
すなわち $(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2\,|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}})^2\,|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2$.

2013 年 2 月 2 日

いや，これもまずいぞ．次の緑色のような余分な円も含めてしまうことになるなぁ．

う〜む，どうすればいいのだろうか？

いい表現があったらご教示いただきたい．



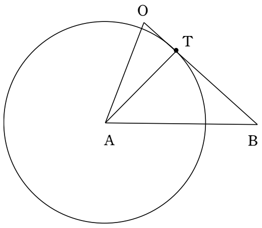
■　次に，円のベクトル方程式に関する問題を作ってみた．

△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする．

(1)　中心が点 A で，直線 OB に接する円のベクトル方程式を求めよ．

(2)　中心が点 A で点 B を通る円と，点 B を通り辺 OA に平行な直線 l との交点のうち，B と異なる点 C の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ．

＜解＞　(1)　接点を $T(t\vec{b})$ とおくと，



$AT \perp OB$ から，$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{OB}=0$．

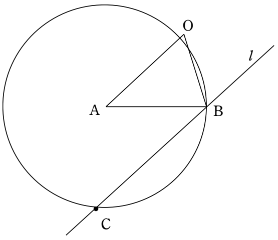
$\therefore (t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0 \quad \therefore t=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$．

したがって，半径は

$$|\overrightarrow{AT}|=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}-\vec{a}\right|=\frac{\left|(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}-|\vec{b}|^2\vec{a}\right|}{|\vec{b}|^2}.$$

よって，$|\vec{p}-\vec{a}|=\dfrac{\left|(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}-|\vec{b}|^2\vec{a}\right|}{|\vec{b}|^2}$．

(2)　l のベクトル方程式は，



$\vec{p}=\vec{b}+t\vec{a}$ で，

円のベクトル方程式は，

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}-\vec{a}|$．

交点であるから，$\vec{p}$ を消去すると

$|\vec{b}+t\vec{a}-\vec{a}|=|\vec{b}-\vec{a}|$　で，

両辺を 2 乗して

$|\vec{b}+t\vec{a}-\vec{a}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$．

$\therefore |\vec{b}|^2-2(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)^2|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$．

これより $t=0,\ 2-\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$．

$t=0$ のときは点 B であるから，点 C の位置ベクトルは

$\overrightarrow{OC}=\vec{b}+2\left(1-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$．　　（終）

(2)について，弦 BC の中点を M とすると，AM⊥OA を用いて解くことも可能である．

■　いかにもベクトルベクトルした問題ができたと思うが，自画自賛であろうか．

生徒の実情に合わせて，OA，OB の長さや，∠AOB の大きさなどを具体的に与えてもよいだろう．

2013 年 2 月 2 日