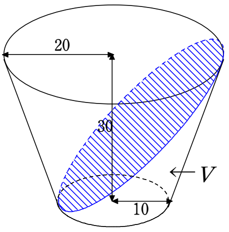
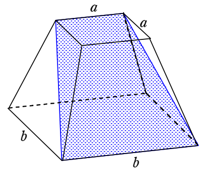
雑感　切断された円錐台の体積

■　例の質問箱から．
「右のような円錐台を図の斜線の楕円を含む平面で上下に切断したとき，下側の体積 V を求めよ」
質問者の積年の疑問となっている問題なのだそうで，答えが $1400\,\pi$ という記憶があるという．



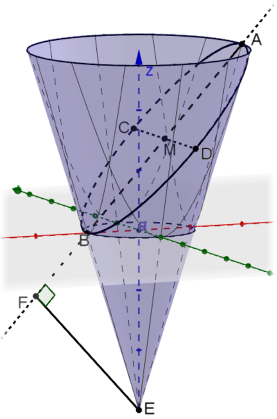
■　これに対して，ある高校生（自称）が，実にスマートと思われる解法を回答した．
それは，上側と下側は高さが同じで，「底」面積の比が $2^2:1^2$ だから，V はこの円錐台全体の体積 $(20^2\cdot 60-10^2\cdot 30)\pi/3$ の $1^2/(2^2+1^2)=1/5$ で，V=$1400\,\pi$ であるというものである．
この結果は質問者の記憶にある値と一致するのだが，ここで用いられている「体積が，高さが一定なら底面積に比例する」という性質に，質問者自身が今一つ釈然としないところがあるらしい．

■　考えてみると，例えば下側の体積を考えるとき，底面を小さな三角形に分割して，この立体の高さの三角錐の集合を考え，それらの和に近似してよいのかという問題に関連してくる．
そこで，右のような正四角錐台をこの青い平面で上下に切断したとき，その体積比が $a^2:b^2$ になるかどうかを調べてみる．



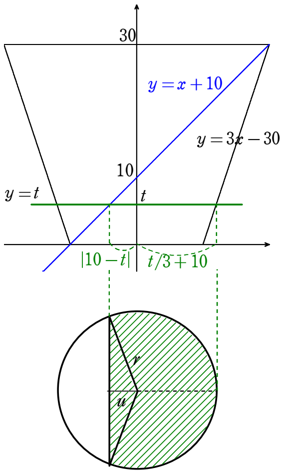
これらの形は，楔型と呼ばれるもので，カシオの計算サイト https://keisan.casio.jp/exec/system/1322645195 に掲載の式が参考になる．これによって計算すると体積比は$a(2a+b):b(2b+a)$になり，$a^2:b^2$ にはならない．
したがって，円錐台でも体積が「高さが一定なら底面積に比例する」という性質は成り立たないはずである．

■　では，正しくはどうなるのか．
断面の楕円の短軸半径の計算が厄介なので，思い切り座標で攻めてみる．



円錐台は $(z+30)^2=9(x^2+y^2)\ (0\leq z\leq 30)$ とおけて，上面の縁の端点 A$(20,0,30)$，底面の縁の端点 B$(-10,\,0,\,0)$を結ぶ線分が長軸．
長軸の中点 M を通り長軸に垂直で楕円面上にある短軸は，直線 $x=5,y=t,z=15$ が円錐台と交わる 2 点$(5,\pm 10\sqrt{2},15)$を結ぶ線分 CD になる．したがって，断面の楕円の長軸半径は$15\sqrt{2}$，短軸半径は$10\sqrt{2}$ である．
また，図の円錐台の下に補った円錐の頂点 E$(0,\,0,\,-30)$から直線 AB に引いた垂線の長さは，直線 AB と z 軸の交点が$(0,0,10)$なので，$20\sqrt{2}$ になる．
よって，V と補った円錐を併せた斜楕円錐の体積が$15\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 20\sqrt{2}/3\pi$ となることから，$V=2000\sqrt{2}\pi-1000\pi=1000(2\sqrt{2}-1)\pi\fallingdotseq 1828.43\,\pi$ が正しい値であると考えられる．

■　しかし，この値だとすると質問者の記憶と異なることになる．
念のため別の方法でも確認してみるのが良かろう．方法はスライスした切断面の面積を積分する定番の方法である．



最初の円錐台を，底面から t の高さで切断した断面は $0\leq t\leq 10$ のとき右のようであり[このように図を描いてみると，この円錐台の値設定が，実に見事であることが分かる]，その面積は，$r=\frac{t}{3}+10, u=10-t$ とおくと$S(t)=\pi r^2-r^2\arccos\frac{u}{r}+u\sqrt{r^2-u^2}$である．これは，$10\leq t\leq 30$ のときも正しいので，$V=\displaystyle\int_0^{30}S(t)\,dt$ を計算してみると無事 $1000(2\sqrt{2}-1)\pi$ となって，先の結果に一致する．

■　質問者の記憶の $1400\,\pi$ という値がどのように導き出されたものかは不明だが，この高校生と同じ間違った手法で求められた可能性は小さくない．

2024 年 11 月 1 日