雑感　3 点を通る円・4 点を通る球面

■　平面上の 3 点を通る円の方程式を求めるとき，一般的にはその方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおき，3 点の座標を代入した 3 つの方程式を解く．

あまり一般的ではないが，方程式を$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ とおいてもよい．3 点の座標を代入した 3 式について，2 式の差をとれば a^2, b^2, r^2といった煩わしい 2 次の項は消え失せるので，実質的には変わらない．

とは言え，こういった 3 元の連立方程式を解くのを嫌う生徒は多い．

もっと，簡便な方法はないのか．

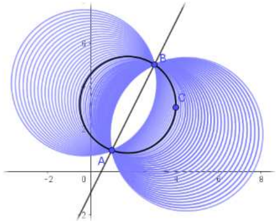
■　A(1,1), B(3,5), C(4, 3) を通る円の方程式を求めるとき，直線 AB の方程式が$2x-y-1=0$ なので，円は$(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)+k(2x-y-1)=0$ とおける．C を通るから座標を代入して，$k=-1/4$ となるから，円の方程式は $(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)-(2x-y-1)/4=0$ より

$x^2+y^2-\dfrac{7}{2}x-\dfrac{25}{4}y+\dfrac{31}{4}=0$ である　としては飛躍が過ぎるだろうか．

ここで，$(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)=0$ が線分 AB を直径とする円であることは，ベクトルの内積からすぐわかる．つまり，線分 AB を弦に持つ円束

$(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)+k(2x-y-1)=0$

のうち，C を通るものとして求めたということである．



■　この手法は空間内で 4 点 A,B,C,D を通る球面の方程式を求める場合でも使えるのか．答えは Yes であるが，少し面倒である．方針は次の通り．

「(線分 AB を直径とする球面)+k(線分 AB を含む平面)=0 」が C を通るように k を決めると，それは，3 点 A,B,C を通るある球面 S となる．

「(S の方程式)+j(平面 ABC の方程式)=0 」が D を通るように j を決めれば出来上がりである．具体例を挙げる．

A(2,0,1), B(0,0,-3) ,C(-1,-3,1),D (3,-3,-3) を通る球面の方程式を求める．

線分 AB を直径とする球面の方程式が$(x-2)x+y^2+(z-1)(z+3)=0$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$∥(1,0,2)⊥(2,0,-1) から，線分 AB を含む平面の 1 つは$2x-(z+3)=0$ である．

$(x-2)x+y^2+(z-1)(z+3)+k\bigl(2x-(z+3)\bigr)=0$ とし，C(-1,-3,1)を代入すると，$k=2$ が得られ，$(x-2)x+y^2+(z-1)(z+3)+2\bigl(2x-(z+3)\bigr)=0$ は 3 点 A,B,C を通るある球面 S（図の右側の球面）となる．

ここで，平面 ABC の方程式が$2x-2y-z-3=0$ であるから，求める球面は次のようにおける．

$$(x-2)x+y^2+(z-1)(z+3)+2\bigl(2x-(z+3)\bigr)+j(2x-2y-z-3)=0$$

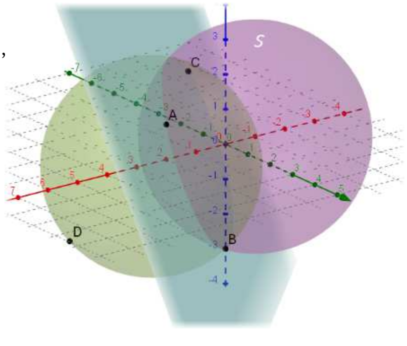
これが D を通ることから$j=-2$ となり，

これより 4 点 A，B，C，D を通る球面は，

$x^2-2x+y^2+4y+z^2+2z-3=0$

となる（図の左側の球面）．

球面束のダブル使用である．

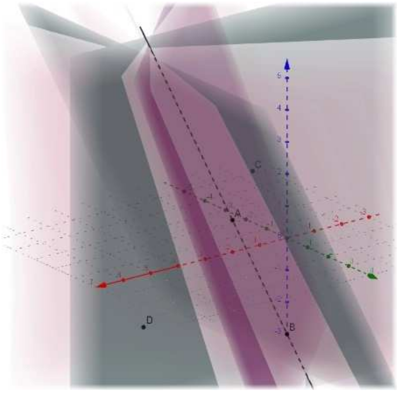


■　上の解で，平面 ABC の方程式を $2x-2y-z-3=0$ といきなり書いてしまった．法線ベクトルを外積計算で求めれば一気だが，実はここでも上の「束」が使える．

■　上に書いたように$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$∥(1,0,2)⊥(2,0,-1) から，線分 AB を含む平面の 1 つは $2x-(z+3)=0$ である．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$∥(1,0,2)⊥(0,1,0) から，線分 AB を含むもう 1 つの平面として$y=0$ がある．

したがって，2 点 A，B を含む平面は $2x-(z+3)+ly=0$ とおけ，これが C を通ることから$l=-2$ となり，平面 ABC の方程式は，

$2x-2y-z-3=0$ となる．



■　球面の方程式の解法はともかく，平面における 3 点を通る円や空間内の 3 点を通る平面の方程式を求めるにあたっては，便利な解法と言えないだろうか．

2023 年 04 月 01 日