雑感　円弧長とほぼ等しい線分の作図

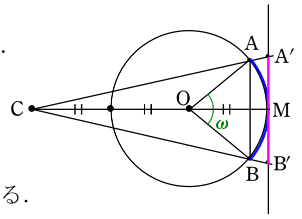
■　月刊誌『数学セミナー』2017 年 3 月号の NOTE に，「円弧の長さを近似する簡単な線分の作り方」（仁平政一氏）があって，全く以て驚きの作図法である．

簡単のため，円の半径は 1 としておく．

右図において，ω が小さいとき，

「孤 AB(青)の長さ≒線分 A′B′ (ピンク)の長さ」の関係が成り立つというのである．

この簡明さを含めて，全くの驚きである．



■　理由の詳細は月刊誌に譲るが，OC$=k$， A′B′ $=x$ とおくと，

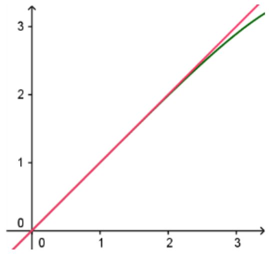
△OCA で正弦定理を用いて，$x=\dfrac{2(k+1)\sin(\omega/2)}{k+\cos(\omega/2)}$ となることが容易に分かる．右辺を $\omega=0$ の周りで Taylor 展開すると，

$x=\omega-\dfrac{k-2}{24(k+1)}\omega^3+\dfrac{k^2-13k+16}{1920(k+1)^2}\omega^5+O(\omega^7)$ となる．

ここで，$k=2$ とすると，ω^3 の項が消えて，$x=\omega-\dfrac{1}{2880}\omega^5+O(\omega^7)$ となり， $x\fallingdotseq\omega$ だというのである．

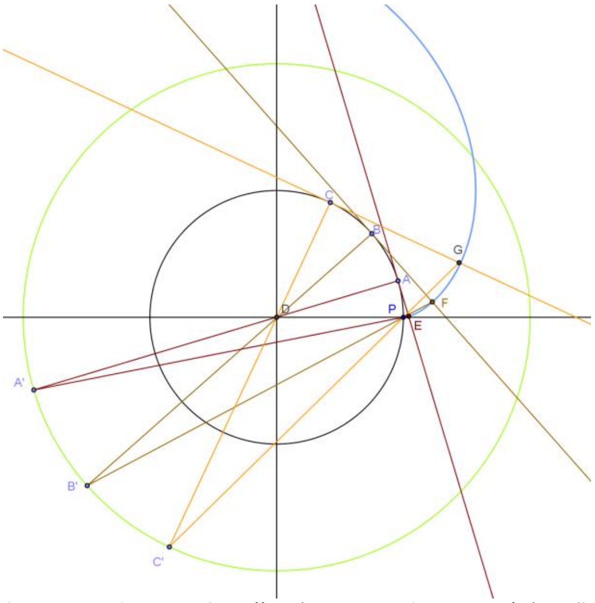
OC＝2 にこのような明確な根拠がある．

$x=\dfrac{6\sin(\omega/2)}{2+\cos(\omega/2)}$ となって，グラフは右の緑色．ピンクが $x=\omega$ であり， $\omega\fallingdotseq 0$ ではほぼ重なる（横軸が ω， 縦軸が x ）．



■　作図をするとき，円の弧長と同じ長さの線分が欲しいということがある．

そのとき， これは極めて簡便で有効な方法である．
例えば，フリーハンドでインボリュート曲線を描くとき，円弧長と同じ長さの接線長を接点から接線上にプロットする必要がある．この方法を用いれば，それが近似的に容易に可能である．下にその図を載せた．



内部の円が半径 1，外部の黄緑色の円が半径 2 で，青色の曲線が内部の円のインボリュート $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$ である．
3 点 A，B，C における接線と，図の点 A′, B′, C′ ，点 P (1, 0) に対する直線 PA′，PB′，PC′ の交点を図のように順に E，F，G とする．

このとき，孤 AP≒線分 AE，孤 BP≒線分 BF，孤 CP≒線分 CG から，E，F，G がインボリュート上にほぼ存在する（∠POC が大きい C に対する交点 G に微妙なずれがあるのは致し方あるまい）．

■　良くは知らないのだが，設計の製図で曲線部分に $R=$○といった表記をよく見かける．これは曲線を円弧で表した半径であろう．そういった製図に基づいて製作される製品に，その円弧長と同じ長さの真っ直ぐな部品というものが必要な場面があるに違いない．そういった長さをこのような簡便な方法で近似的に作り出すことができるというのは，画期的なことではなかろうか．

2017 年 03 月 01 日