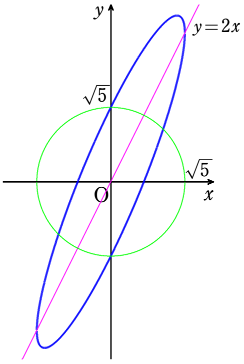
雑感　傾いた楕円の軸

■　方程式 $y = ax \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ （$a \neq 0$，$r > 0$）が表す図形は，直線 $y = ax$ と円 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ を合成した図形で，傾いた楕円を表す．

たとえば，$y = 2x \pm \sqrt{5 - x^2}$ は右図のブルーの曲線で，ピンクの直線 $y = 2x$ とグリーンの円 $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$ を合成してできる楕円である．



■　この楕円の軸の方程式をどう求めたらいいのだろうか．当たり前のことだが，軸の傾きは a のみに関係する．

■　O がこの楕円の中心であるから，軸の方程式を $y = kx$ とおき，この直線と楕円との交点を A $(\alpha,\ k\alpha)$ とおくと，線分 OA の長さが最大・最小となる場合が軸である．

$y = ax \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ は $(y - ax)^2 = r^2 - x^2$ と同値で，
ここに $y = kx$ を代入して整頓すると
$(k^2 - 2ak + a^2 + 1)x^2 = b^2$　となり，α はこの 2 次方程式の解である．よって，$\mathrm{OA}^2 = (k^2 + 1)\alpha^2 = \dfrac{r^2(k^2+1)}{k^2 - 2ak + a^2 + 1}$ となり，これを $f(k)$ とおく．

$f'(k) = -\dfrac{2rb^2(k^2 - ak - 1)}{(k^2 - 2ak + a^2 + 1)^2}$ であり，$f'(k) = 0$ とすると

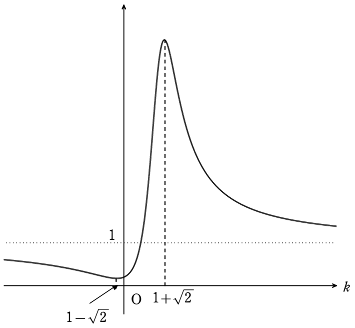
$k = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ となり，（増減表を省くが）ここで最大・最小となる．したがって，$\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$ が軸の傾きになる．なお，2 つの軸の傾きの積は $\dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \cdot \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} = -1$ となり，（当然のことだが）軸は直交している．

■　具体的には，上の
$y = 2x \pm \sqrt{5 - x^2}$ においては

$f(k) = \dfrac{5(k^2+1)}{k^2 - 4k + 5}$，

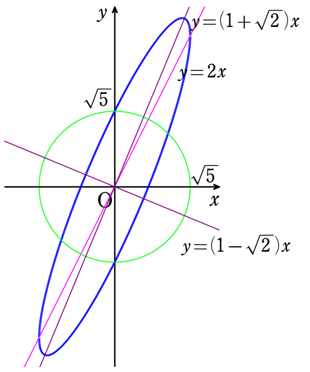
$f'(k) = -\dfrac{20(k^2 - 2k - 1)}{(k^2 - 4k + 5)^2}$

となり，右のグラフのように
$k = 1 + \sqrt{2}$ で最大，
$k = 1 - \sqrt{2}$ で最小となり，
その k の値がそれぞれ長軸，短軸の傾きである．



これを図示すると，右図のようになる．

なお，誤解はないと思うが，この場合，軸と楕円の交点は極大点や極小点ではない．



■　傾いた 2 次曲線の軸については，余り目にしないので考えてみたが，双曲線，放物線についても，追って考察する．

2012 年 7 月 4 日